CalcNI2019L10

06/19

I (1) $y = e^{-3t} = e^{u}$ と $u = -3t$ を用いて表す.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^{u} \cdot (-3) = -3e^{-3t}$$

(2) $y = e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{u}$ と $u = -\frac{1}{2}t^2$ を用いて表す.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^{u}(-t) = -t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

(3) $y = \log(1+t^2) = \log u$ と $u = 1+t^2$ を用いて表す.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{u} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}$$

II I(1) と同様に $(e^{2t})' = 2e^{2t}$ であることが分かる.

$$f'(t) = 1 \cdot e^{2t} + t \cdot 2e^{2t} = (2t+1)e^{2t}$$

となる. $e^{2t} > 0$ が常に成立するので

$$f'(t) \gtreqless 0 \iff 2t+1 \gtreqless 0 \iff t \gtreqless -\frac{1}{2}$$

これを用いて増減表を求める.

t		$-\frac{1}{2}$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

(グラフ) 一般に $\frac{e^t}{t^n} \to 0 \quad (t \to +\infty)$

が成立する。(これはTaylorの定理を用いて示す。)

$$\lim_{t \to -\infty} t e^t = 0$$

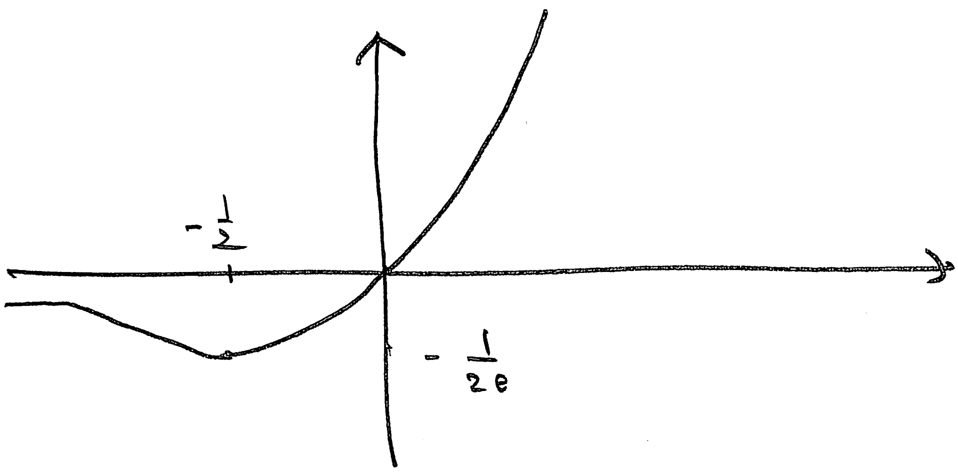
が分かる。$t = -s$ とおくと $t \to -\infty$ のとき $s \to +\infty$ で

$$t e^t = -s e^{-s} = -\frac{s}{e^s} \longrightarrow 0$$

となる。$t \to +\infty$ のとき $e^t \to +\infty$ なので

$$t e^t \longrightarrow +\infty$$

である



III

$$f'(t) = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} (t-1) + t^{\frac{1}{3}} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} \left((t-1) + 3t \right)$$

$$= \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} (4t-1)$$

である $t>0$ において $t^{-\frac{2}{3}} > 0$ なので

$$f'(t) \underset{<}{\geqq} 0 \iff 4t-1 \underset{<}{\geqq} 0 \iff t \underset{<}{\geqq} \frac{1}{4}$$

であることを用いて増減表を得る.

t	(0)		$\frac{1}{4}$	
f'	$/$	$-$	0	$+$
f	(0)	↘	$-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$	↗

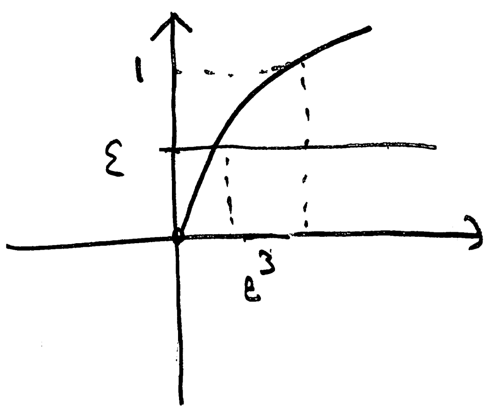
ゆえに, $t^{\frac{1}{3}} \to 0 \quad (t \to +0)$

である $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon^3$

とすると

$0 < t < \delta = \varepsilon^3$

$\Rightarrow \quad 0 < t^{\frac{1}{3}} < \delta^{\frac{1}{3}} = \varepsilon$



から従う. これから $t \to +0$ のとき

$$t^{\frac{1}{3}} (t-1) \to 0 \cdot (-1) = 0.$$

$t>1$ ならば $t < t^{\frac{4}{3}}$ なので $t \to +\infty$ のとき，

$$t^{\frac{4}{3}} \to +\infty$$

である

$$t^{\frac{1}{3}}(t-1) = t^{\frac{4}{3}}\left(1-\frac{1}{t}\right)$$

において $t \to +\infty$ とすると

$$t^{\frac{4}{3}} \to +\infty,\ \left(1-\frac{1}{t}\right) \to 1-0=1$$

から

$$t^{\frac{1}{3}}(t-1) \to +\infty$$

とわかる．