2019 年 6 月 19 日演習問題

I 関数 $y = te^{-t}$ の増減表を凹凸を含めて求めましょう．

（解答） 関数 $y = te^{-t}$ の導関数は

$$\begin{aligned} y' &= (t)'e^{-t} + t(e^{-t})' = 1 \cdot e^{-t} + t(-e^{-t}) \\ &= e^{-t}(1-t) \\ y'' &= -e^{-t}(1-t) + e^{-t}(-1) \\ &= e^{-t}(t-2) \end{aligned}$$

と求まります．$e^{-t} > 0$ が常に成立しますから

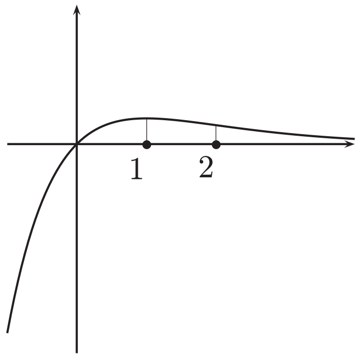
$$y' \gtreqless 0 \Longleftrightarrow 1 - t \gtreqless 0 \Longleftrightarrow t \lesseqgtr 1$$

$$y'' \gtreqless 0 \Longleftrightarrow t - 2 \gtreqless 0 \Longleftrightarrow t \gtreqless 2$$

が分ります．このことから関数 $y = te^{-t}$ の増減表は

t		1		2	
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↱	$\frac{1}{e}$	↴	$\frac{2}{e^2}$	↳

となります．



$t \to +\infty$ のとき

$$y = \frac{t}{e^t} \to 0$$

は基本的な事実です．また $t \to -\infty$ のとき $-t \to +\infty$ ですから

$$e^{-t} \to +\infty$$

となり、従って

$$te^{-t} \to -\infty$$

となります．以上からグラフは右上図のようになります．（技術的な都合上極大点 $(1, \frac{1}{e})$ および変曲点 $(2, \frac{2}{e^2})$ の y 座標は描いていません．）

II 関数 $y = t \log t$ の増減表を求めましょう．

（解答） 関数 $y = t \log t$ の微分を求めると

$$y' = \log t + 1, \quad y'' = \frac{1}{t} > 0$$

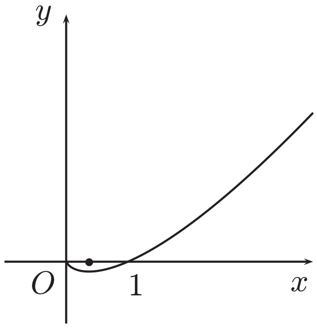
となります．y' の符号は

$$y' \gtreqless 0 \Longleftrightarrow \log t \gtreqless -1 \Longleftrightarrow t \gtreqless e^{-1} = \frac{1}{e}$$

となります．従って，増減表は

t		$\frac{1}{e}$	
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	↳	$-\frac{1}{e}$	⤴

となります．



$t \to +\infty$ のとき $\log t \to +\infty$ ですから

$$y = t\log t \to +\infty$$

となります．また $t \to +0$ のとき $s = -\log t \to +\infty$ となりますから

$$y = t\log t = e^{-s}(-s) = -\frac{s}{e^s} \to 0$$

となります．以上からグラフは左図のようになります．（技術的な都合上極小点 $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ 座標は描いていません．）

III 関数 $y = \frac{1}{x^2+1}$ の増減表を求めましょう．

（解答）まず関数の導関数を求めると

$$y' = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

$$y'' = -2\frac{1\cdot(t^2+1)^2 - t\cdot 2(t^2+1)\cdot 2t}{(t^2+1)^4} = \frac{6(t^2-\frac{1}{3})}{(t^2+1)^3}$$

を得ます．$t^2+1>0$ から

$$y' \gtreqless 0 \Longleftrightarrow t \lesseqgtr 0$$

$$y'' \gtreqless 0 \Longleftrightarrow t^2 \gtreqless \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t < -\frac{1}{\sqrt{3}},\ t > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right\}$$

となりますから，増減表は以下のようになります．

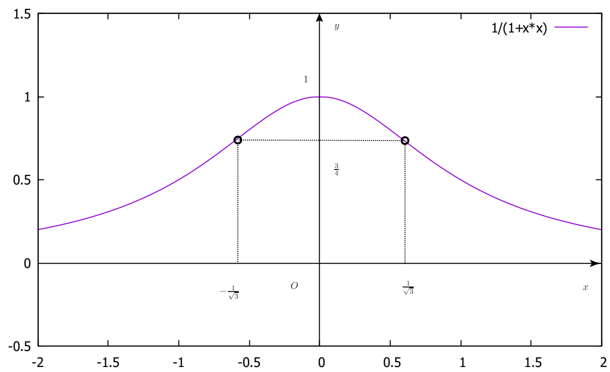
t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	⤴	$\frac{3}{4}$	↱	1	↴	$\frac{3}{4}$	↳

となります．

さらに $t \to \pm\infty$ のとき $\frac{1}{t^2} \to 0$ となりますから

$$y = \frac{1}{1+t^2} = \frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}} \to \frac{0}{1+0} = 0$$

となります．以上からグラフは以下のようになります．（技術的な問題から変曲点 $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$，極大点 $(0,1)$ の座標は描いていいません．）



IV 関数 $y = t^2e^t$ の増減表を求めましょう．

（解答）　関数 $y = t^2e^t$ の微分を求めると

$$y' = 2t\cdot e^t + t^2e^t = t(t+2)e^t$$

$$y'' = (2t+2)e^t + t(t+2)e^t = (t^2+4t+2)e^t = \{t-(-2+\sqrt{2})\}\cdot\{t-(-2-\sqrt{2})\}e^t$$

となります．$e^t > 0$ が常に成立しますから

$$y' \gtreqqless 0 \Leftrightarrow t(t+2) \gtreqqless 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t < -2, t > 0 \\ t = -2, 0 \\ -2 < t < 0 \end{array} \right\}$$

$$y'' \gtreqqless 0 \Leftrightarrow \{t - (-2+\sqrt{2})\} \cdot \{t - (-2-\sqrt{2})\} \gtreqqless 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t < -2-\sqrt{2}, t > -2+\sqrt{2} \\ t = -2 \pm \sqrt{2} \\ -2-\sqrt{2} < t < -2+\sqrt{2} \end{array} \right\}$$

と y' および y'' の符号が別れますから，以上で増減表は下図となります．

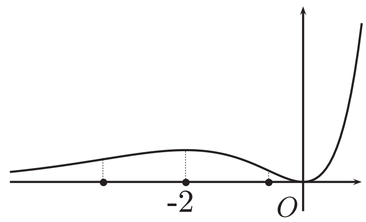
さらに $t \to +\infty$ のとき $t^2 \to +\infty$, $e^t \to +\infty$ から

$$y = t^2 e^t \to +\infty$$

が従います．また $t \to -\infty$ のとき $s = -t \to +\infty$ ですから

$$y = (-s)^2 e^{-s} = \frac{s^2}{e^s} \to 0$$

が従います．以上からグラフは下図となります．（技術的な問題から極大点，極小点，変曲点の座標の全ては記述していません．）



	$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0	
$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
⤴	$(6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$	↱	$4e^{-2}$	⤵	$(6-4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$	↳	0	⤴

V 関数 $y = \frac{\log t}{t}$ の増減表を求めましょう．

（解答）　関数 $y = \frac{\log t}{t}$ の導関数を求めると

$$y' = \frac{(\log t)' t - \log t \cdot (t)'}{t^2} = \frac{1 - \log t}{t^2}$$
$$y'' = \frac{-\frac{1}{t} \cdot t^2 - 2t(1 - \log t)}{t^4} = \frac{2\log t - 3}{t^3}$$

となりますから，y' および y'' の符号は

$$y' \gtreqqless 0 \Longleftrightarrow \log t \lesseqqgtr 1 \Longleftrightarrow t \lesseqqgtr e$$

$$y'' \gtreqqless 0 \Longleftrightarrow \log t \gtreqqless \frac{3}{2} \Longleftrightarrow t \gtreqqless e^{\frac{3}{2}}$$

となります．以上から増減表は

t		e		$e^{\frac{3}{2}}$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↱	$\frac{1}{e}$	⤵	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↳

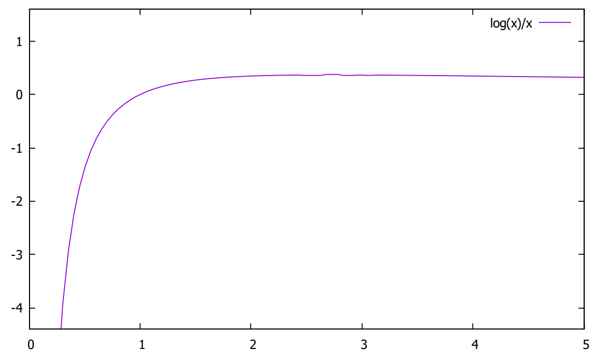
となります．さらに $t \to +\infty$ のとき $s = \log t \to +\infty$ が成立しますから

$$y = \frac{\log t}{t} = \frac{s}{e^s} \to 0$$

が従います．また $t \to +0$ のとき $\frac{1}{t} \to +\infty$ および $\log t \to -\infty$ が成立しますから

$$y = \frac{\log t}{t} \to -\infty$$

が従います．



VI 関数 $y = \frac{t}{t^2+1}$ 　に対して増減表を求めましょう．

（解答）

$$y' = \frac{(t)'(t^2+1) - t(t^2+1)'}{(t^2+1)^2} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(1-t^2)'(t^2+1)^2 - (1-t^2)\cdot 2(t^2+1)\cdot 2t}{(t^2+1)^4} \\ &= \frac{-2t(t^2+1)+4t(t^2-1)}{(t^2+1)^3} \\ &= \frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3} \end{aligned}$$

となります．$1+t^2>0$ ですから y' および y'' の符号は

$$y' \gtreqless 0 \Leftrightarrow 1-t^2 \gtreqless 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1<t<1 \\ t=\pm 1 \\ t<-1,\ t>1 \end{array} \right\}$$

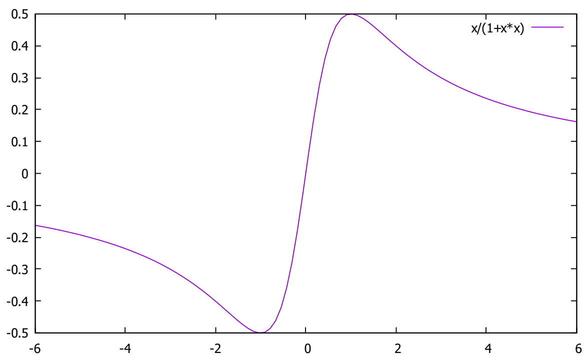
$$y'' \gtreqless 0 \Leftrightarrow t(t^2-3) \gtreqless 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{3}<t<0, t>\sqrt{3} \\ t=0, \pm\sqrt{3} \\ t<-\sqrt{3},\ 0<t<\sqrt{3} \end{array} \right\}$$

となります．以上から増減表は下図となります．

さらに $t \to +\infty$ のとき $\frac{1}{t} \to 0$ となりますから

$$y = \frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} \to \frac{0}{1+0} = 0$$

が従います．



t		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$

VII 関数 $y = \frac{1}{x} + \log x$ の増減表を凹凸を含めて求めましょう．

（解答） 導関数を求めると

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} \\ y'' &= \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3} \end{aligned}$$

となります．$x>0$ が定義域ですから

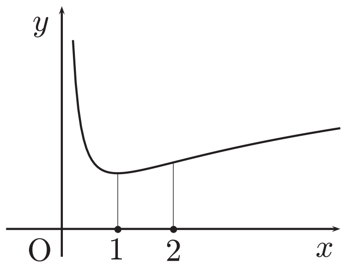
$$\begin{aligned} y' \gtreqless 0 &\Longleftrightarrow x-1 \gtreqless 0 \\ &\Longleftrightarrow x \gtreqless 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' \gtreqless 0 &\Longleftrightarrow 2-x \gtreqless 0 \\ &\Longleftrightarrow t \lesseqgtr 2 \end{aligned}$$

が分ります．このことから関数 $y = \frac{1}{x} + \log x$ の増減表は

t		1		2	
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}+\log 2$	$\nearrow$

となります．



さらに $x \longrightarrow +\infty$ のとき

$$\frac{1}{x} + \log x \longrightarrow 0 + \infty = +\infty$$

となります．他方、$x \longrightarrow +0$ のときは、$t = \frac{1}{x} \longrightarrow +\infty$ であることを用いると

$$\frac{1}{x} + \log x = t - \log t = t(1 - \frac{\log t}{t}) \longrightarrow +\infty \cdot (1-0) = +\infty$$

であることが分かります．以上からグラフは右上図になります．（技術的な理由から，極小点と変曲点の座標を記入していません．）

VIII $y = t^2 \log t$ に対して凹凸を含めて増減表を求めましょう．

（解答）関数 $y = t^2 \log t$ の導関数と 2 階の導関数を求めると

$$\begin{aligned} y' &= (t^2)' \log t + t^2 (\log t)' \\ &= 2t \log t + t^2 \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2t \log t + t = 2t(\log t + \frac{1}{2}) \\ y'' &= (2t)'(\log t + \frac{1}{2}) + 2t \cdot (\log t + \frac{1}{2})' \\ &= 2(\log t + \frac{1}{2}) + 2t \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2(\log t + \frac{1}{2}) + 2 = 2(\log t + \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

を得ます．これから

$$\begin{aligned} y' \gtreqless 0 &\iff \log t + \frac{1}{2} \gtreqless 0 \\ &\iff \log t \gtreqless -\frac{1}{2} \\ &\iff t \gtreqless e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' \gtreqless 0 &\iff \log t + \frac{3}{2} \gtreqless 0 \\ &\iff \log t \gtreqless -\frac{3}{2} \\ &\iff t \gtreqless e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

が分かり、次の増減表を得ます．

t		$e^{-\frac{3}{2}}$		$e^{-\frac{1}{2}}$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	⤵	$-\frac{3}{2e^3}$	↳	$-\frac{1}{2e}$	⤴

さらに $t \to +\infty$ のとき $t^2 \to +\infty$，$\log t \to +\infty$ なので

$$y = t^2 \cdot \log t \to +\infty$$

となります．また $t \to +0$ のとき $s = -\log t \to +\infty$ ですから

$$y = t^2 \log t = e^{-2s}(-s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{e^{2s}} \to -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

となります．