CalcNT 2019
Lec09 06/12

I

$$y = \frac{x^2+3x+3}{x+2} = \frac{x(x+2)+x+3}{x+2}$$

$$= x + \frac{x+2+1}{x+2} = x+1+\frac{1}{x+2}$$

である.

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2-1}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{\boxed{(x+2)^2}} \quad \boxed{(x+2)^2} > 0$$

から

$$y' \gtreqless 0 \iff (x+1)(x+3) \gtreqless 0 \iff \begin{cases} x<-3,\ x>-1 \\ x=-1,-3 \\ -1<x<-3 \end{cases}$$

となるので増減表は以下の通りである

x		-3		-2		-1	
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y	↗	-3	↘	/	↘	1	↗

$$y = x+1+\frac{1}{x+2}$$

$x \to +\infty$ のとき $x+1 \to +\infty$, $\frac{1}{x+2} \to 0$ から $y \to +\infty$

$x \to -\infty$ のとき $x+1 \to -\infty$, $\frac{1}{x+2} \to 0$ から $y \to -\infty$

$$y-(x+1) = \frac{1}{x+2} \to 0 \quad (x \to \pm\infty)$$

から

$x \to \pm\infty$ のとき $y = x+1$ が漸近線となる.

$x \to -2+0$ のとき $\frac{1}{x+2} \to +\infty$, $x+1 \to -1$ から $y \to +\infty$

$x \to -2-0$ のとき $\frac{1}{x+2} \to -\infty$, $x+1 \to -1$ から $y \to -\infty$

(図は省略)

$$y = x+1+\frac{1}{x+2}$$

II

$$y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{\boxed{(1+x^2)^2}}$$

>0

から

$$y' \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0$$

となるので増減表は以下

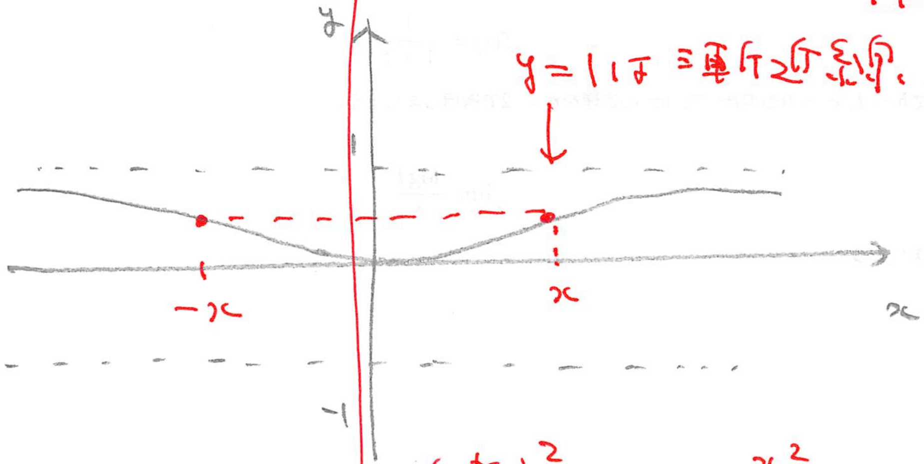
x		0	
y'	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗

$x \to \pm\infty$ のとき $\frac{1}{x^2} \to 0$ から $y = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \to$ ×

$$\frac{1}{1+0} = 1$$

グラフは以下

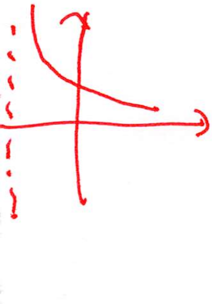
y=1は漸近線。



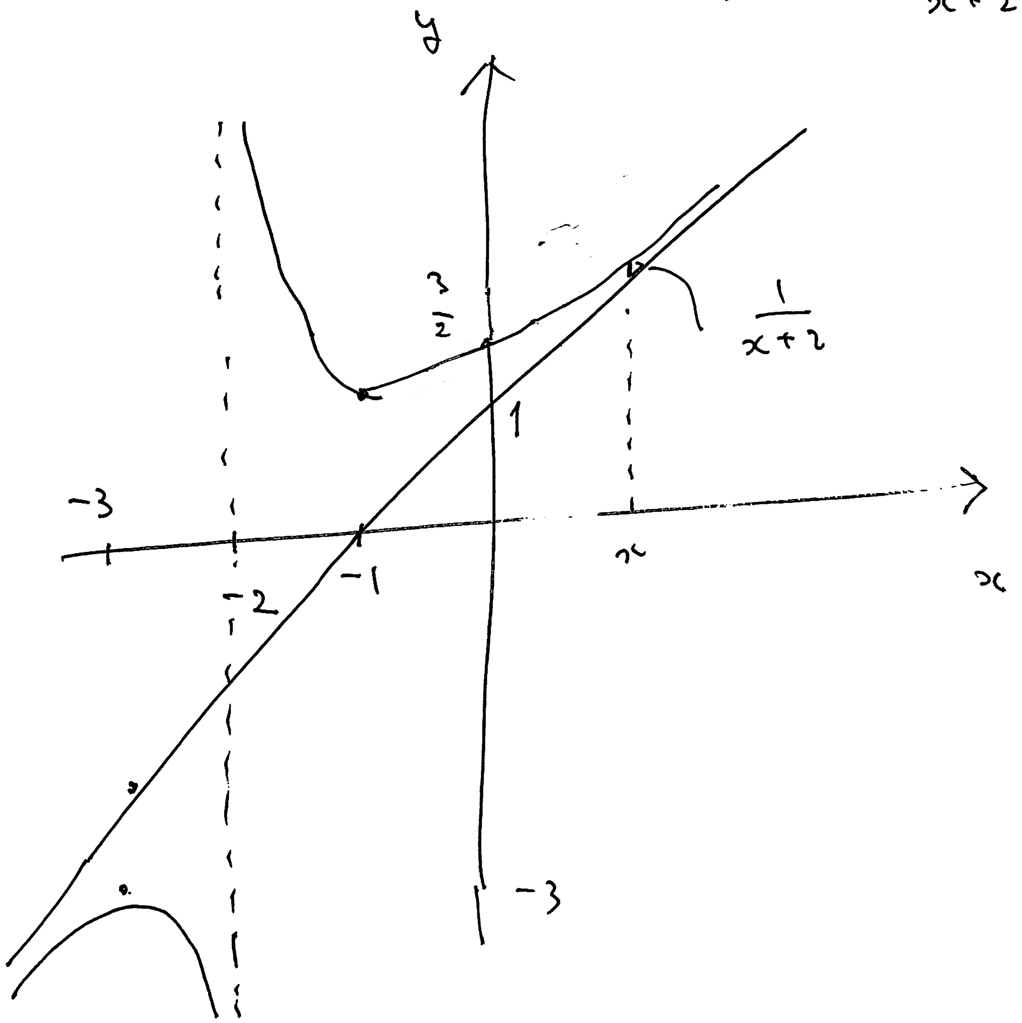
$$y = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

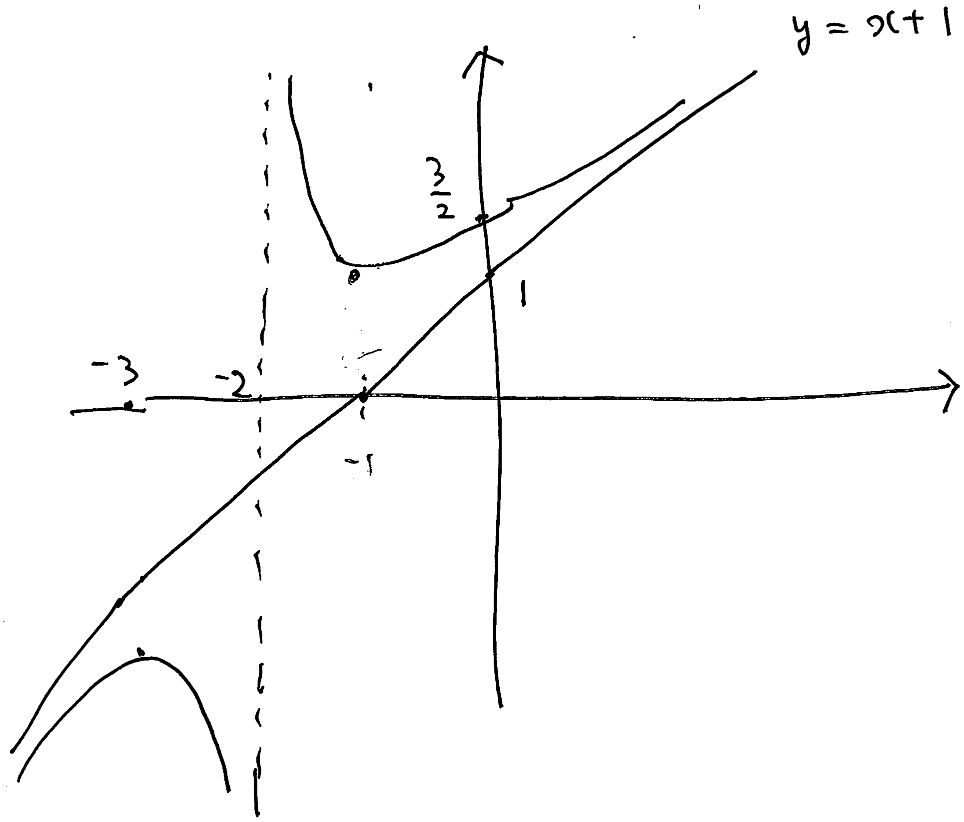
x軸で対称

$$y = \frac{1}{x+2}$$



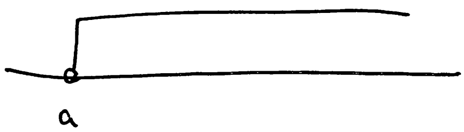
$$y = x + 1 + \frac{1}{x+2}$$





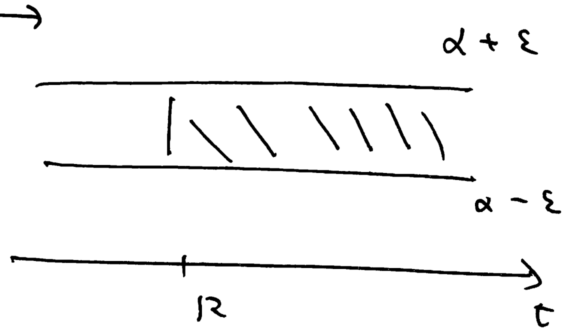
y = x + 1
3/2
1
-3
-2
-1

$f: (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$



$f(t) \longrightarrow \alpha \quad (t \to +\infty)$

$\iff$ $t_n \to +\infty$, $t_n > 0$ $\Rightarrow$ $f(t_n) \longrightarrow$



$\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0$

$t > R \Rightarrow \alpha - \varepsilon < f(t) < \alpha + \varepsilon$

$a_n \to +\infty$ ($-\infty$), $b_n \to \alpha \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$ ($-\infty$)

$a_n \le b_n$ $\quad a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$

$\Rightarrow \quad \alpha \le \beta$.

極限

極限 (1)

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \qquad (1)$$

$0 < x < y \Downarrow x^t < y^t$

$n \leqq t \leqq n+1$ とすると

$a > 1$ のとき

$0 < x < y \Rightarrow x^n < y^n$

$$1+\frac{1}{n+1} \leqq 1+\frac{1}{t} \leqq 1+\frac{1}{n}$$

$x < y \Rightarrow a^x < a^y$

従って

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{t}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^t \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n},$$

これから

$1+\frac{1}{t} > 1$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}_{= a_n} \leqq \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leqq \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n}}_{= b_n}$$

極限 (2)

さらに

余計 $\quad \overset{0}{\uparrow}$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \longrightarrow e\cdot 1 = e$$

と

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow e\cdot 1 = e$$

ひどい。

$t\to+\infty$ とすると $n\to+\infty$ となり

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \to e \quad (t\to+\infty)$$

$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は収束. $e_n < 3$.

$$\downarrow$$

e $\qquad e \leqq 3$

$\quad\;\; \shortparallel$

$\quad 2.71\cdots$

$t_n \to +\infty$ のとき $\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} \to e \quad (n \to +\infty)$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0$ が存在して

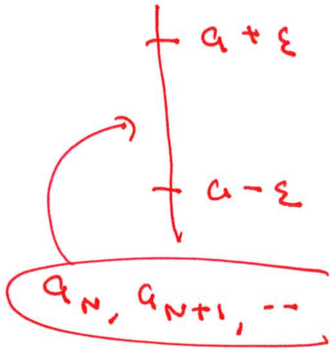
$t \geqq R$ ならば $\quad e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{t}\right)^t < e + \varepsilon$

$a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$n \leqq t \leqq n+1$ のとき

$$a_n \leqq \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leqq b_n.$$

$a_n \to e, \quad b_n \to e. \qquad a_n \leqq b_n \quad \cdots$



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad \exists N_2$

$n \geqq N_1 \quad e - \varepsilon < a_n < e + \varepsilon$

$n \geqq N_2 \quad e - \varepsilon < b_n < e + \varepsilon.$

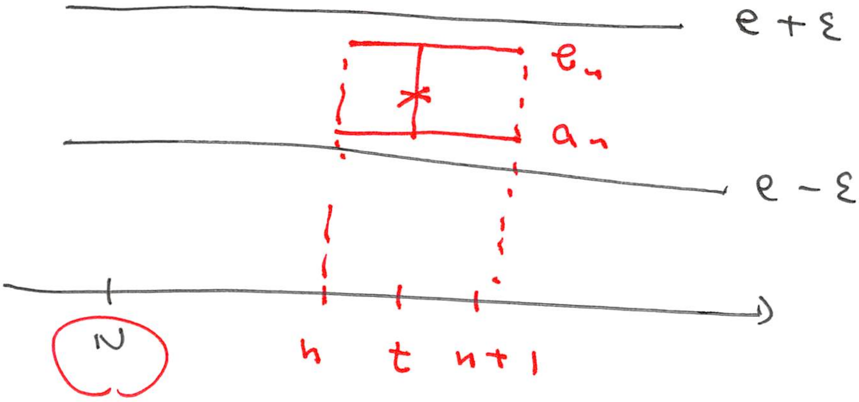
$N = \max(N_1, N_2) \geqq N_1$

$\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \geqq N_2$

$n \geqq N \Longrightarrow \quad e - \varepsilon < a_n \leqq b_n < e + \varepsilon.$

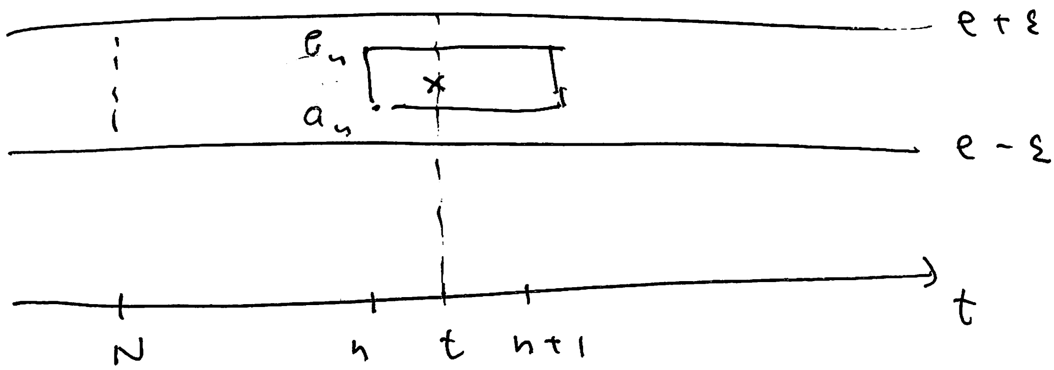
$\forall \varepsilon > 0$

$t \geq N$



$\hookrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ $n \geq N$

$\forall \varepsilon > 0$ $\qquad$ $t \geqslant N$ とする.



このとき $\quad n \geqslant N$.

極限 (3)

極限

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \qquad (2)$$

s を $t=-s$ と定義すると，$t\longrightarrow-\infty$ のとき $s\longrightarrow+\infty$ となり，

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t &= \left(1-\frac{1}{s}\right)^{-s} = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{-s} = \left(\frac{s}{s-1}\right)^{s} \\ &= \left(1+\frac{1}{s-1}\right)^{s-1}\left(1+\frac{1}{s-1}\right) \to e\cdot 1\end{aligned} \qquad (3)$$

$\downarrow$ 0

極限 (4)

極限

$$\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

ここで h を $h=\frac{1}{t}$ と定義する．

$t=\frac{1}{h}$

$h\to+0$ のとき, $t\to+\infty$ となり

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = (1+\frac{1}{t})^t \to e$$

$h\to-0$ のとき, $t\to-\infty$ となり

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = (1+\frac{1}{t})^t \to e$$

$h\to0$ のとき

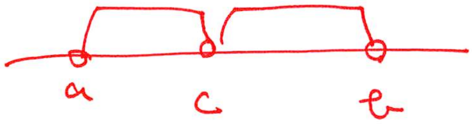
$(1+\frac{1}{h})^h \to e.$

今から証明.

右極限・左極限

$t_n = c + \frac{1}{n}(-1)^n$

$a < c < b$ とします．　関数 $f: (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$



定理

次の条件は必要十分です．

(i) $\lim_{t \to c} f(t)$ が存在する．

(ii) $\lim_{t \to c+0} f(t)$ と $\lim_{t \to c-0} f(t)$ が存在して

$$\lim_{t \to c+0} f(t) = \lim_{t \to c-0} f(t)$$

この定理は例えば以下を使うと示せる．

$$\lim_{t \to c+0} f(t) = \alpha$$

$\Leftrightarrow$

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$c < t < c + \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha - \varepsilon < f(t) < \alpha + \varepsilon$$

極限 (5)

$y = e^t$ 連続 $\longrightarrow$ 逆関数 $t = \log_e y$ 連続

関数 $\log t$ の連続性から

極限

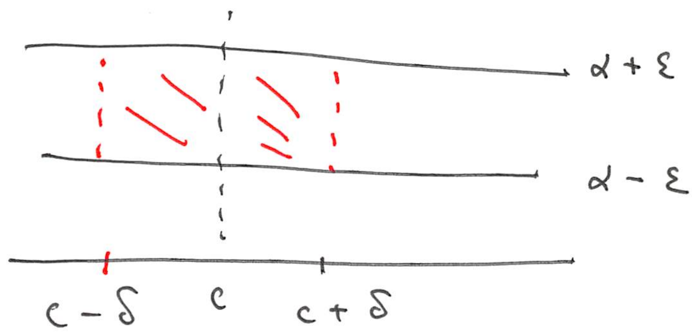
$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1 \tag{4}$$

$(1+h)^{\frac{1}{h}} \to e$

$\frac{\log(1+h)}{h} = \log(1+h)^{\frac{1}{h}} \longrightarrow \log e = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

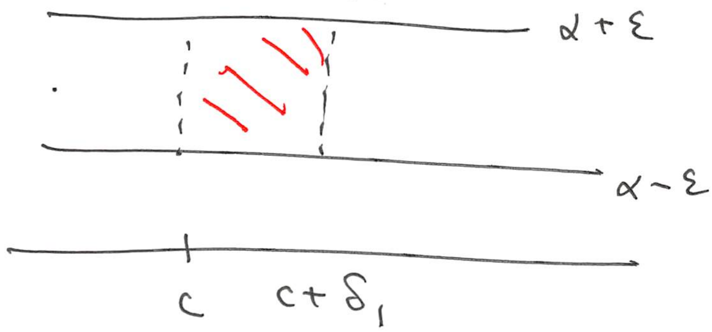
$$\lim_{t \to c} f(t) = \alpha$$



$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$

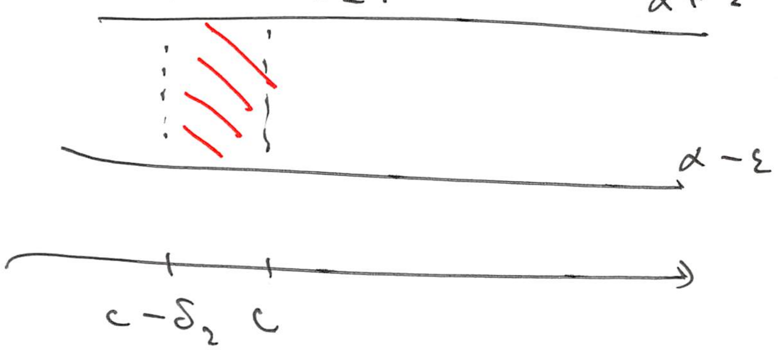
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0$

$$\lim_{t \to c+0} f(t) = \alpha$$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0$

$$\lim_{t \to c-0} f(t) = \alpha$$



極限 (6)

次に $x = \log(1+h)$ とすると　　$e^x = e^{\log(1+h)} = 1+h.$

$$h = e^x - 1$$

となるが，関数 e^x の連続から　　$x \to 0$　$e^x \to 1 = e^0$

$$x \to 0 \quad のとき \quad h \to 0$$

$e^x - 1 \to 0$
$= h$

および

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{\log(1+h)}{h} \longrightarrow 1 \quad (x \longrightarrow 0)$$

を得る．

極限

$$\frac{e^x - 1}{x} \longrightarrow 1 \quad (x \longrightarrow 0) \tag{5}$$

$$\frac{e^x - e^a}{x-a} = \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\to e^a \cdot 1 = e^a$$

$x \to a$ のとき $h = x - a \to 0$

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

$$\log \frac{a+h}{a}$$

$$\frac{\log x - \log a}{x-a} = \frac{\log(a+h) - \log a}{h}$$

$x \to a$ のとき $h = x - a \to 0$

$$= \frac{\log\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{h}$$

$\frac{h}{a} \to 0$

$$= \frac{\log\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}} \cdot \frac{1}{a}$$

$\to 1$

$$\to 1 \cdot \frac{1}{a}$$

$$\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}}$$

$$x^\alpha = (e^{\log x})^\alpha \qquad x = e^{\log x}.$$

$x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$= e^{\alpha \log x}.$$

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \log x} = e^u. \qquad u = \alpha \log x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x}$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

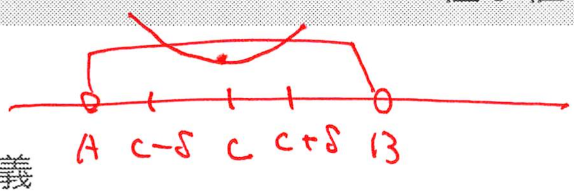
$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}} \qquad (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

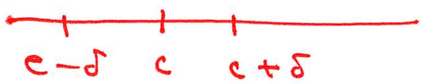
平均値の定理

Nobuyuki TOSE

Jun 21, 2017

極小値・極大値





定義

$f: (A,B) \to \mathbf{R}$ に対して，f が $t = c \in (A,B)$ において極小値 (*minimal value*) を持つとは，ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(t) \geq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta).$$

が成立するときです．f が $t = c \in (A,B)$ において極大値 (*miaximal value*) を持つとは, ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(t) \leq f(c) \quad (c - \delta < t < c + \delta).$$

が成立するときです．

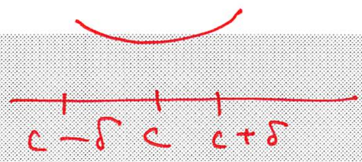
定理（極大・極小の必要条件）

定理

微分可能な関数 $f:\ (A,B)\to\mathbf{R}$ が $t=c\in(A,B)$ で極小値（極大値）を持つならば

$$f'(c)=0$$

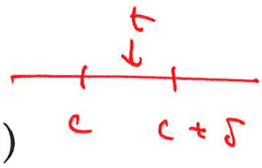
証明



証明 f が $t=c$ で極小値を持つので, ある $\delta>0$ に対して

$$f(t)\ge f(c)\quad (c-\delta<t<c+\delta).$$

が成立します．この不等式から

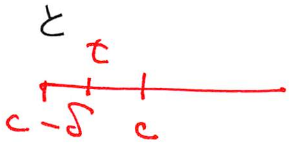


≥ 0

$$\frac{\boxed{f(t)-f(c)}}{\boxed{t-c}}\ge 0\quad (c<t<c+\delta)$$

>0

と



≥ 0

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\le 0\quad (c-\delta<t<c)$$

<0

が従います．

ここで t を右から $t=c$ に近づけると: $t\to c+0$

$$f'(c)\ge 0$$

他方，t を左から $t=c$ に近づけると: $t\to c-0$

$$f'(c)\le 0$$

$f'(c)=0$

I　$f'(t)$ を求める

(1) $f(t) = e^{-3t}$　(2) $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

(3) $f(t) = \log(1+t^2)$

II　$f(t) = t\,e^{2t}$ の増減表

III　$f(t) = t^{\frac{1}{3}}(t-1)$

$(t > 0)$