2019 年 6 月 12 日演習問題解答

I 以下の函数を微分しましょう．
(1) $y = f(t) = e^{-2t}$ **(2)** $y = f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ **(3)** $y = f(t) = te^t$ **(4)** $y = f(t) = t^2e^t$
(5) $y = f(t) = \log(1+t^2)$ **(6)** $y = f(t) = t\log(t+1)$ **(7)** $y = f(t) = t^2\log t$

解答

(1) $y = e^{-2t}$ は $y = e^u$ と $u = -2t$ の合成で

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt} = e^u\cdot(-2) = -2e^{-2t}$$

(2) $y = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ は $y = e^u$ と $u = -\frac{1}{2}t^2$ の合成で

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt} = e^u\cdot(-t) = -te^{-\frac{1}{2}t^2}$$

(3)

$$f'(t) = (t)'e^t + t(e^t)' = 1\cdot e^t + te^t = (t+1)e^t$$

(4)

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t^2)'e^t + t^2(e^t)' = 2t\cdot e^t + te^t \\ &= (t^2+2t)e^t = t(t+2)e^t \end{aligned}$$

(5) $y = \log(1+t^2)$ は $y = \log u$ と $u = 1+t^2$ の合成で

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{1}{u}\cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}$$

(6) $y = \log(1+t)$ は $y = \log u$ と $u = 1+t$ の合成で

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{1}{u}\cdot 1 = \frac{1}{1+t}$$

(7)

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t^2)'\log t + t^2(\log t)' = 2t\log t + t^2\cdot\frac{1}{t} \\ &= 2t(\log t + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

II 以下の函数の増減表を求めましょう．
(1) $f(t) = \frac{1}{t} + \log t$ **(2)** $f(t) = te^{2t}$

解答 **(1)**

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t^2}$$

から $f(t)$ の定義域 $t > 0$ において

$$f'(t) \gtreqless 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} t > 1 \\ t = 1 \\ 0 < t < 1 \end{cases}$$

であることが分かります．よって増減表は

t	(0)		1	
$f'(t)$	/	$-$	0	$+$
$f(t)$	/	$\searrow$	1	$\nearrow$

であることが分かります．

補足

$$f''(t) = \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^2} = \frac{2-t}{t^3}$$

から $f(t)$ の定義域 $t > 0$ において

$$f'(t) \gtreqless 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 0 < t < 2 \\ t = 2 \\ t > 2 \end{cases}$$

であることが分かります．よって凹凸を踏める増減

表は

t	(0)		1		2	
$f'(t)$	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(t)$	/	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(t)$	/	↳	1	⤴	$\frac{1}{2}+\log 2$	↱

となります．$t \to +\infty$ と $t \to +0$ の漸近挙動について考えます．

<u>$t \to +\infty$ のとき</u>

$$\frac{1}{t} \to 0, \quad \log t \to +\infty$$

から

$$f(t) = \frac{1}{t} + \log t \to +\infty$$

であることが分かります．

<u>$t \to +0$ のとき</u>$s := \frac{1}{t} \to +\infty$ となります．そこで

$$\frac{1}{t} + \log t = s - \log s = s\left(1 - \frac{\log s}{s}\right)$$

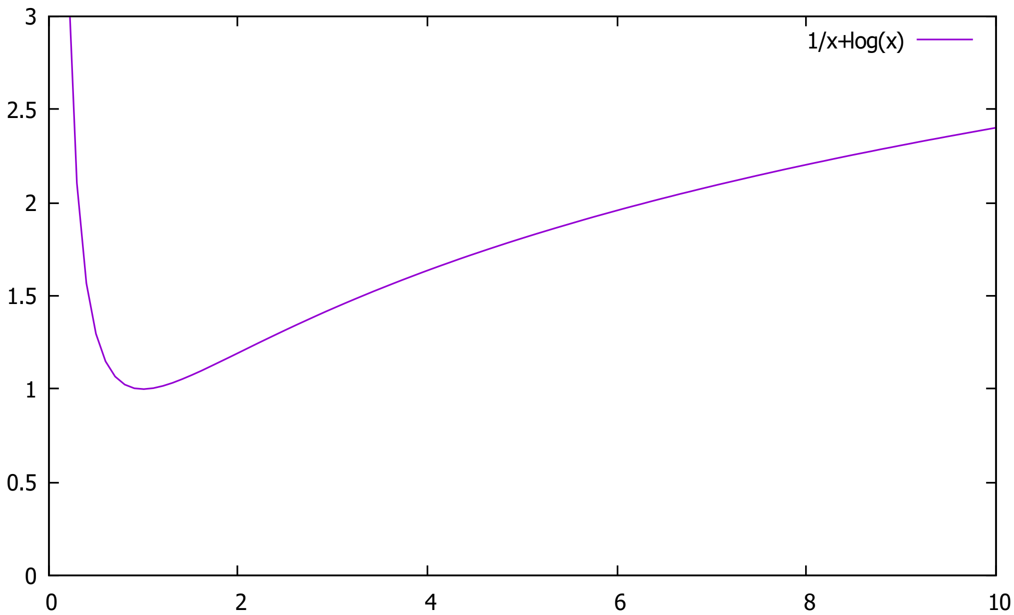
において

$$\frac{\log s}{s} \to 0 \quad 従って \quad \left(1 - \frac{\log s}{s}\right) \to 1-0 = 1 > 0$$

となりますから[*1]

$$\frac{1}{t} + \log t = s - \log s = s\left(1 - \frac{\log s}{s}\right) \to +\infty$$

となります．以上でグラフは以下のようになります．



解答 (2)

$$f'(t) = (t)'e^{2t} + t(e^{2t})' = 1 \cdot e^{2t} + t \cdot 2e^{2t} = e^{2t}(2t+1)$$

となりますから増減表は

t		$\frac{1}{2}$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

となります．

補足 $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ のときの漸近挙動を調べましょう．

<u>$t \to +\infty$ のとき</u>

$$t \to +\infty, \quad e^{2t} \to +\infty$$

[*1] $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = 0$ については，Taylor の定理を学ぶ後に示すことができます．

から

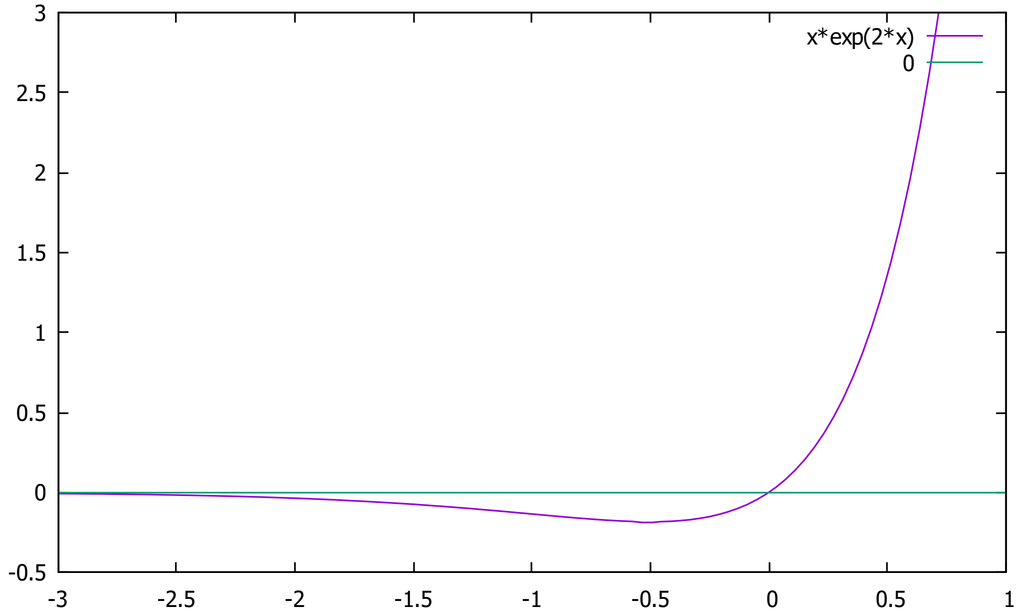
$$f(t) = te^{2t} \to +\infty$$

が分かります．

$t \to -\infty$ のとき$s = -2t \to +\infty$ となりますが

$$te^{2t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{s}{e^s} \to 0$$

が従います．以上からグラフは以下のようになります．



補足問題　$f''(t)$ を計算して，凹凸を含めた増減表を求めましょう．