2019 年 6 月 05 日小テスト解答

$y = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{u}$

$x + 1 = u$

I(1) $y = \frac{x^2}{x+1}$ に対して $y = x + A + \frac{B}{x+1}$ となる定数 A, B を求めましょう．
(2) y' を求めて y の増減表を求めましょう．
(3) $x \to -1 \pm 0,\ x \to \pm\infty$ の極限を求めて，y のグラフを描きましょう．

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2} \cdot 1 = \cdots$

解答 (1)

$$y = \frac{x^2}{x+1} = \frac{x(x+1) - x}{x+1} = x - \frac{x}{x+1}$$
$$= x - \frac{\boxed{x+1}-1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$y' = 1 - 0 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2}$

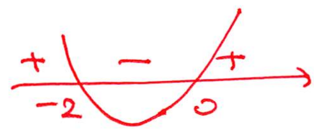
から $A = -1, B = 1$

(2)

$$y' = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\overset{x^2+2x}{\cancel{x^2(x+2)}}}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{\boxed{(x+1)^2}} > 0$$

となります．y' の符号は

$$y' \gtreqless 0 \Leftrightarrow x(x+2) \gtreqless 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, x > 0 \\ x = -2, 0 \\ -2 < x < 0 \end{cases}$$



と判定できますから，増減表は次のようになります．

x		-2		-1		0	
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y	↗	-4	↘	/	↘	0	↗

yは定義されていない

(3) $x \to -1 + 0$ のとき $\frac{1}{x+1} \to +\infty,\ x - 1 \to -2$ なので

-1

$$y = x - 1 + \frac{1}{x+1} \to +\infty$$

$x \to -1 - 0$ のとき $\frac{1}{x+1} \to -\infty,\ x - 1 \to -2$ なので

-1

$$y = x - 1 + \frac{1}{x+1} \to -\infty$$

$a_n \to \alpha \in \mathbb{R}$
$b_n \to +\infty$ $-\infty$
$\Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$ $-\infty$

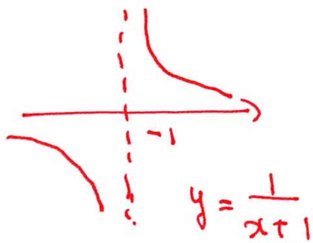
$x \to +\infty 0$ のとき $\frac{1}{x+1} \to 0,\ x - 1 \to +\infty$ なので

消す．

$$y = x - 1 + \frac{1}{x+1} \to +\infty$$

$x \to -\infty 0$ のとき $\frac{1}{x+1} \to 0,\ x - 1 \to -\infty$ なので

$$y = x - 1 + \frac{1}{x+1} \to -\infty$$

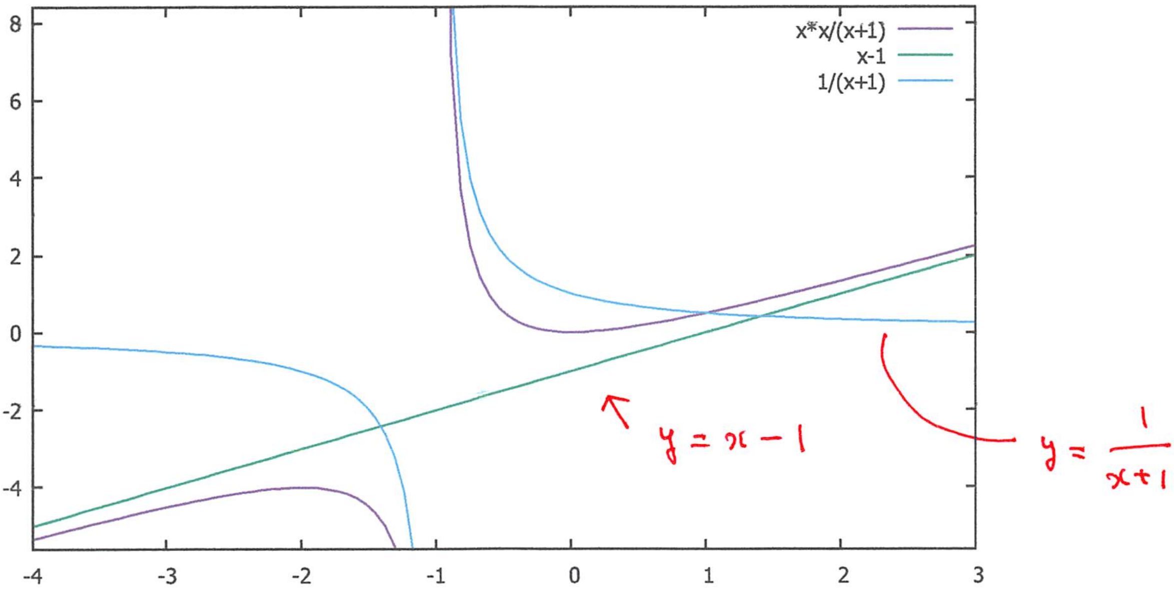


さらに $x \to \pm\infty$ のとき

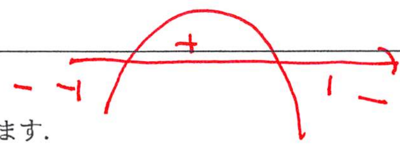
$$y - (x - 1) = \frac{1}{x+1} \to 0$$

なので $y = x - 1$ が漸近線となる．グラフは以下のようになる．

GNU plot



II $y = \frac{x}{x^2+1}$ とします．
(1) 導関数 y' を求めましょう．**(2)** 増減表を求めましょう．



解答

$$y' = \frac{\overbrace{(x)'}^{1}(x^2+1) - x\overbrace{(x^2+1)'}^{2x}}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{\boxed{(x^2+1)^2}} > 0$$

となります．y' の符号は

$$y' \gtreqqless 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \gtreqqless 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ x = \pm 1 \\ x < -1,\ x > 1 \end{array} \right\}$$

以上から増減表は下図となります．

x		-1		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

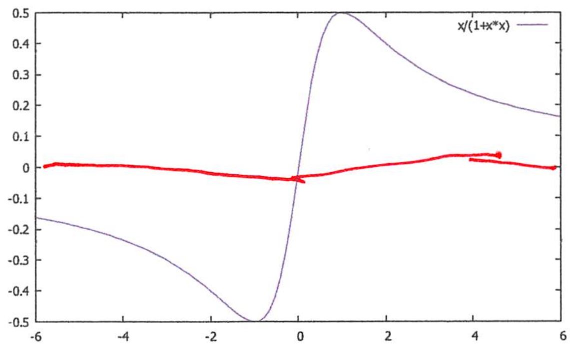
さらに $x \to +\infty$ のとき $\frac{1}{x} \to 0$ となりますから

$\pm$

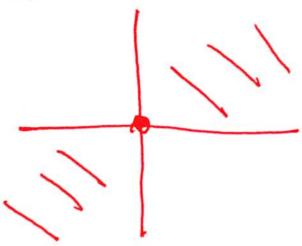
$$y = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \Rightarrow \frac{0}{1+0} = 0$$

$y = \frac{x}{x^2+1}$

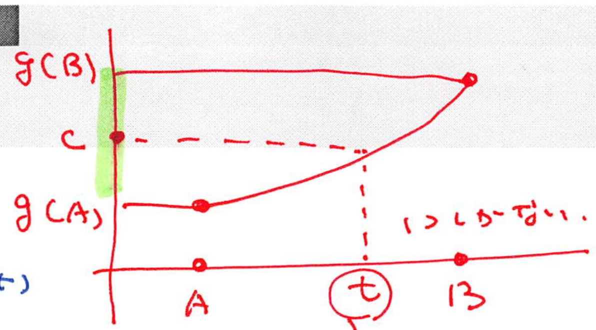
が従います．



$y \gtreqqless 0 \Longleftrightarrow x \gtreqqless 0$



逆関数定理



$g(s) = c$
$g(t) = c$
$s < t \leadsto \underset{c}{g(s)} < \underset{c}{g(t)}$

定理

Given a function $g: [A, B] \to \mathbf{R}$ and assume the following conditions:
(i) g は $[A, B]$ 上で連続である.
(ii) g is 狭義の増加関数 *i.e.*

$$A \le s < t \le B \Rightarrow g(s) < g(t)$$

$\boxed{g(s) \le g(t) \text{ 広義の単調増加}}$

このとき g の逆関数

$c \longmapsto t$

$$g^{-1}: [g(A), g(B)] \to \mathbf{R}$$

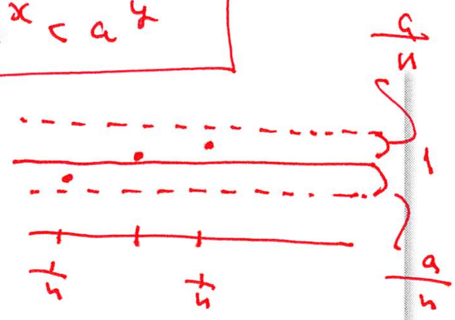
が存在して $[g(A), g(B)]$ 上で連続となります.

ここまで。

6/12 はここから。

指数関数の連続性 (1)

$y = a^x$ $\quad \boxed{x < y \Rightarrow a^x < a^y}$



補題 1

$a > 1$ のとき

$0 < \frac{1}{n} \leadsto \boxed{1 = a^0 < a^{\frac{1}{n}}}$

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a}{n}$$

$$-\frac{a}{n} < a^{-\frac{1}{n}} - 1 < 0$$

$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n$ とすると $\alpha_n > 0$ となり

$= 1 + n \cdot \alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n$

$$a = (1 + \alpha_n)^n > n\alpha_n$$

であることが 2 項定理から従います.

$\alpha_n < \frac{a}{n}$

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \alpha_n < \frac{a}{n}$$

$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n$
$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \alpha_n < \frac{a}{n}$.

$a > 1$ aとき
$x < y \Longrightarrow 0 < a^x < a^y$

指数関数の連続性 (2)

$$\boxed{-\frac{a}{n} < a^{-\frac{1}{n}} - 1 < 0}$$

他方 $a^{-\frac{1}{n}} = 1 - \beta_n$ とすると $0 < \beta_n < 1$ であり

$-\frac{1}{n} < 0 \leadsto a^{-\frac{1}{n}} < a^0 = 1$, $a^{-\frac{1}{n}} > 0$

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1-\beta_n} = 1 + \beta_n + \beta_n^2 + \cdots > 1 + \beta_n$$

従って

2項定理

$$a > (1+\beta_n)^n > n\beta_n$$

$= 1 + n\beta_n + \frac{n(n-1)}{2}\beta_n^2 + \cdots + \beta_n^n$

が 2 項定理から分かります．これから $0 < \beta_n < \frac{a}{n}$ と

$$1 - \frac{a}{n} < 1 - \beta_n = a^{-\frac{1}{n}}$$

が従います．

$$-\frac{a}{n} < a^{-\frac{1}{n}} - 1 < 0$$

指数関数の連続性 (3)

$x < y < z \Rightarrow a^x < a^y < a^z$

補題 2

$a > 1$ であるとき

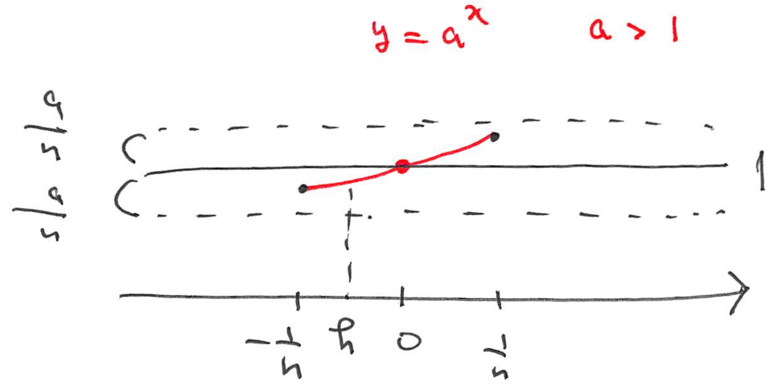
$$\boxed{-\frac{a}{n} < a^h - 1 < \frac{a}{n}}$$

$$-\frac{1}{n} < h < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{a}{n} < a^{-\frac{1}{n}} < a^h < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{a}{n}$$

補題 2 は補題 1 から導けます．
任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して自然数 $N \in \mathbf{N}$ が存在して $\frac{a}{N} < \varepsilon$ となります．
このとき $\delta = \frac{1}{n}$ とすると

$$-\delta < t < \delta \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < -\frac{a}{n} < a^t - 1 < \frac{a}{n} < \varepsilon$$

これは $g(t) = a^t$ が $t = 0$ で連続であることを意味します．

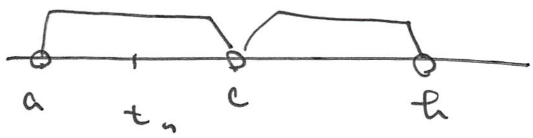


y = a^x
a > 1
1
0

$$a < c < b$$

$$f : (a, c) \cup (c, b) \to \mathbb{R}$$

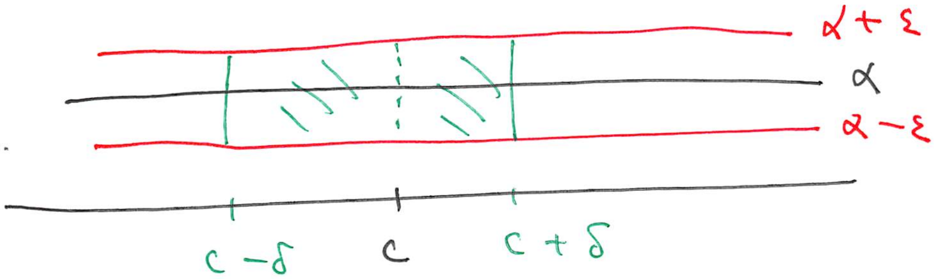
$$f(t) \to \alpha \quad (t \to c)$$



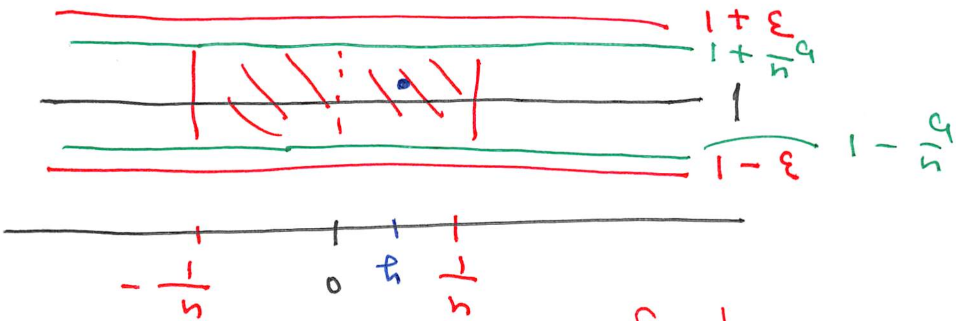
$$\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} a < t_n < b \\ t_n \neq c \\ t_n \to c \end{array}\right\} \Longrightarrow f(t_n) \to \alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

$$\alpha - \varepsilon < f(t) < \alpha + \varepsilon \quad \left(\begin{array}{l} t \neq c \\ c - \delta < t < c + \delta \end{array} \right)$$



$\forall \varepsilon > 0 \qquad \varepsilon > \frac{a}{n} > 0$ となるように n をとる



$\delta = \frac{1}{n}$ とする.

$$\boxed{a^h \to 1 \quad (h \to 0)}$$

$$a^x \longrightarrow a^{x_0} \quad (x \to x_0)$$

$x \to x_0$ ならば

$x - x_0 \to 0$

$$a^x = a^{x - x_0} \cdot a^{x_0}$$

$$\to 1 \cdot a^{x_0} = a^{x_0}$$

ネピアの数 e

Nobuyuki TOSE

June 05, 2019

Nepier's Number

利息を計算 compound.

Nepier's Number

以下の数列について考えよう．

100% 年利.

$100r\%$

$r = 0.01 \leftrightarrow 1\%$

1年後の元利合計.

$$e_1 = \left(1 + \frac{r}{1}\right)^1 \qquad e_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2.000$$

$$e_2 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 \qquad e_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.250$$

$\frac{1}{2}$ 年複利

$1 \mapsto 1 + \frac{1}{2}$

$(1+\frac{1}{2}) \to$

$(1+\frac{1}{2})^2$

$$e_3 = \left(1 + \frac{r}{3}\right)^3 \qquad e_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370$$

$$e_4 = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4 \qquad e_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.441$$

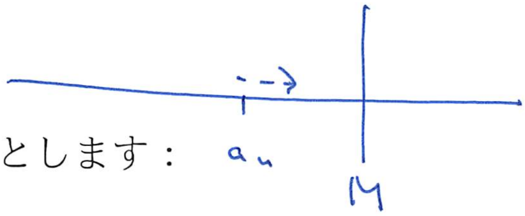
$$\vdots$$

$$e_n = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \qquad e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e = 2.71\cdots$$

$\longrightarrow e^r$

瞬間複利.

上に有界な単調増加数列の収束



定理

無限数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は単調増加であるとします：

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots$$

さらに $\{a_n\}$ は上に有界であるとします：正数 $M > 0$ が存在して

$$a_n \le M \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

このとき $\{a_n\}$ は収束します．

The proof of the theorem is highly transcendental. We are going to work on the assumption of it.

$\mathbb{R}$の完備性．

e_n の収束 (1)

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
= \;& 1 + {}_nC_1\frac{1}{n} + {}_nC_2\frac{1}{n^2} + {}_nC_3\frac{1}{n^3} + \cdots + {}_nC_k\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
= \;& 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots \\
& \cdots + \boxed{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdots 1}\cdot\frac{1}{n^k}} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
= \;& 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\
& \cdots + \boxed{\frac{1}{k!}\cdot\boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}} + \ldots \\
& \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

e_n の収束 (2)

は単調増加 $\{e_n\}$ *i.e.*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

実際

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
< \; & \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{n+1}\right)\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

e_n の収束 (3)

次に $\{e_n\}$ が上に有界であることを示します.

$$e_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

さらに

$$2^{n-1} < n! \quad (n = \underbrace{\boxed{1,2}}_{=}, 3, \ldots)$$

$= 2 \sim 3.$

$n=2$ $\quad 2^{2-1} = 2!$

$1\cdot 2 < 1\cdot 2.$

が

$$1\cdot 2\cdot 2\ldots 2 < 1\cdot 2\cdot 3\ldots n$$

$n=3$ $\quad 2^{3-1} < 3!$

$1\cdot 2\cdot 2 < 1\cdot 2\cdot 3$

から従いますから,

$$\begin{aligned}
e_n &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3
\end{aligned}$$

ネピアの数–ファイナンス (1)

1 単位の資金を年利率 $r > 0$ で銀行に預金します．
利子を 4 半期ごとに計算すると 1 年後に元利合計は

$$\left(1+\frac{r}{4}\right)^4$$

利子を毎月計算すると 1 年後に元利合計は

$$\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$$

利子を毎日計算すると 1 年後に元利合計は

$$\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365}$$

ネピアの数–ファイナンス (2)

Compounding of the interest in general

利子計算を同じ長さの m 期間で行うと元利合計は

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$$

となります．さらに連続的に実行すると元利合計は

$$\underbrace{\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = e^r}_{\text{理解できるか？}}$$

I $\quad y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2} = \dfrac{x(x+2)+x+3}{x+2}$

増減表を求めてグラフを描く。

II $\quad y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ 　同じ