2.5　増減表と関数のグラフ

2019 年 6 月 05 日演習問題

I 函数 $y = \frac{x^2-3x+3}{x-2}$ について考えます.
(1) 導関数 y' を求めましょう.
(2) $y = ax + b + \frac{c}{x-2}$ を満たす定数 a, b, c を求めましょう.
(3) y の増減表を求めてグラフを求めましょう.

解答 (1)

$$y' = \frac{(x^2-3x+3)'(x-2) - (x^2-3x+3)(x-2)'}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{(2x-3)(x-2) - (x^2-3x+3)\cdot 1}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

(2)

$$y = \frac{x(x-2) - x + 3}{x-2} = x + \frac{-x+3}{x-2}$$
$$= x + \frac{-(x-2)+1}{x-2} = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

(3) (1) から y' の符号は

$$y' \gtreqless \begin{cases} x < 1 \quad \text{OR} \quad x > 3 \\ x = 1, 3 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

となりますから，増減表は

x		1		2		3	
y'	+	0	−	/	−	0	+
y	↗	−1	↘	/	↘	3	↗

となります. 次に無限遠方と不連続点を与える $x = 2$ の近くでの漸近挙動について考えます.

<u>$x \to +\infty$ のとき</u>

$$y = x \cdot \frac{x^2-3x+3}{x(x-2)} = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}$$

において $x \to +\infty$ のとき

$$x \to +\infty, \quad \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \to \frac{1-0-0}{1-0} = 1 > 0$$

から

$$y = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \to +\infty$$

となります.

<u>$x \to -\infty$ のとき</u>

$$y = x \cdot \frac{x^2-3x+3}{x(x-2)} = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}$$

において $x \to -\infty$ のとき

$$x \to -\infty, \quad \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \to \frac{1-0-0}{1-0} = 1 > 0$$

から

$$y = x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \to -\infty$$

となります.

<u>$x \to 2+0$ のとき</u>

$$y = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

において

$$x - 1 \to 1, \ \frac{1}{x-2} \to +\infty \quad \text{から} \quad y \to +\infty$$

<u>$x \to 2-0$ のとき</u>

$$y = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

において

$$x - 1 \to 1, \ \frac{1}{x-2} \to -\infty \quad \text{から} \quad y \to -\infty$$

であることが分かります．さらに

<u>$x > 2$ において</u>

$$y - (x-1) = \frac{1}{x-2} > 0$$

で

$$y - (x-1) \to 0 \quad (x \to +\infty)$$

<u>$x < 2$ において</u>

$$y - (x-1) = \frac{1}{x-2} < 0$$

で

$$y - (x-1) \to 0 \quad (x \to +\infty)$$

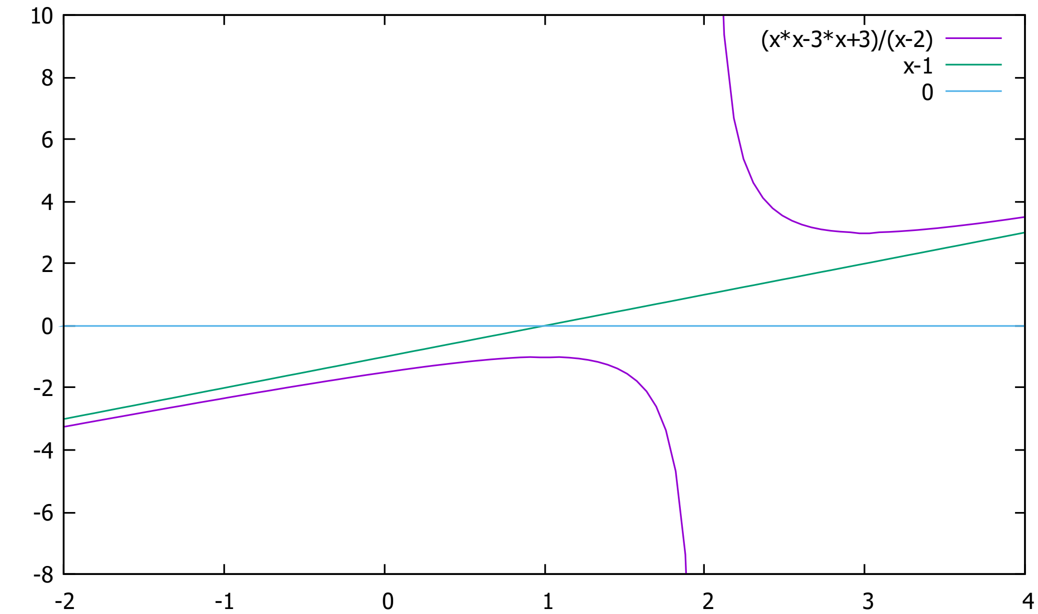
も分かります．最後に

$$x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

が常に成立しますから

$$y \gtrless \Leftrightarrow x \gtrless 2$$

が成立しますからグラフが求まります．



注意

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$$

から

$$y'' = \frac{2}{(x-2)^3}$$

となりますから

$$y'' \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \gtrless 2$$

が分かります．これから凹凸を含めた増減表は

x		1		2		3	
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$-$	$-$	$-$	$-$	/	$+$	$+$	$+$
y	↱	-1	⤵	/	↳	3	⤴

となります．

II 函数 $y=\frac{x^2-2x-1}{x-1}$ について考えます.
(1) 導関数 y' を求めましょう.
(2) $y=ax+b+\frac{c}{x-1}$ を満たす定数 a,b,c を求めましょう.
(3) y の増減表を求めてグラフを求めましょう.

解答 (1)

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(x^2-2x-1)'(x-1)-(x^2-2x-1)(x-1)'}{(x-1)^2}\\
&= \frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x-1)\cdot 1}{(x-1)^2}\\
&= \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2}>0
\end{aligned}
$$

が分かります.

(2)

$$y=\frac{(x-1)^2-2}{x-1}=x-1-\frac{2}{x-1}$$

(3) (1) から y' の符号は

$$y'>0 \quad (x\neq 1)$$

となりますから，増減表は

x		1	
y'	$+$	/	$+$
y	$\nearrow$	/	$\nearrow$

となります. 次に無限遠方と不連続点を与える $x=1$ の近くでの漸近挙動について考えます.

<u>$x\to\pm\infty$ のとき</u>

$$y=x\cdot\frac{x^2-2x-1}{x(x-1)}=x\cdot\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

において $x\to\pm\infty$ のとき

$$x\to\pm\infty,\quad \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}\to\frac{1-0-0}{1-0}=1>0$$

から

$$y=x\cdot\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}\to\pm\infty \quad (\text{複号同順})$$

となります.

<u>$x\to 1+0$ のとき</u>

$$y=x-1-\frac{2}{x-1}$$

において

$$x-1\to 0,\ -\frac{1}{x-2}\to-\infty \quad \text{から} \quad y\to-\infty$$

<u>$x\to 1-0$ のとき</u>

$$y=x-1-\frac{2}{x-1}$$

において

$$x-1\to 0,\ -\frac{1}{x-2}\to+\infty \quad \text{から} \quad y\to+\infty$$

となります.

<u>$x>1$ において</u>

$$y-(x-1)=-\frac{1}{x-1}<0$$

で

$$y-(x-1)\to 0 \quad (x\to+\infty)$$

が分かります．他方

<u>$x<1$ において</u>

$$y-(x-1)=-\frac{1}{x-1}>0$$

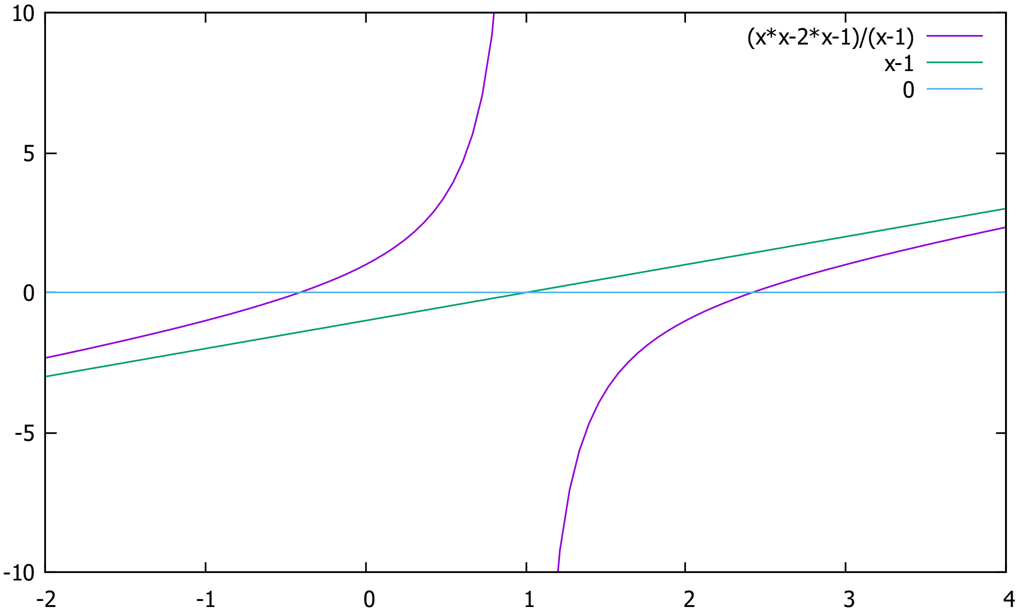
で

$$y-(x-1)\to 0 \quad (x\to-\infty)$$

も分かります．従って $x\to\pm\infty$ のとき $y=x-1$ の漸近することが分かります．最後に

$$y\gtreqqless 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x<1-\sqrt{2} \quad \mathrm{OR} x>1+\sqrt{2}\\ x=1\pm\sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}\end{cases}$$

に注意して次のグラフを得ます.



注意

$$y' = \frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$$

から

$$y'' = -\frac{4}{(x-1)^3}$$

となりますから

$$y'' \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \lessgtr 1$$

が分かります．これから凹凸を含めた増減表は

x		1	
y'	$+$	/	$+$
y''''	$+$	/	$-$
y	⤴	/	↱

となります．

III 函数 $y = \frac{x^2-x-2}{(x-1)(x-3)}$ について考えます．

(1) 導関数 y' を求めましょう．

(2) $y = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-3}$ を満たす定数 a, b, c を求めましょう．

(3) y の増減表を求めてグラフを求めましょう．

解答 (1)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2-x-2)'(x-1)(x-3) - (x^2-x-2)\{(x-1)(x-3)\}'}{(x-1)^2(x-3)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(x-1)(x-3) - (2x-4)(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2} \\ &= \frac{-(3x^2-10x+11)}{(x-1)^2(x-3)^2} \end{aligned}$$

が分かります．ここで

$$3x^2 - 10x + 11 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} > 0$$

から

$$y' > 0$$

が常に成立することが分かります．

(2)

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3 + (3x - 5)}{(x-1)(x-3)} = 1 + \frac{3x - 5}{(x-1)(x-3)}$$

となります．さらに

$$\frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-3} = \frac{b(x-3) + c(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(b+c)x - (3b+c)}{(x-1)(x-3)} = \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}$$

が成立するように

$$b + c = 3, \quad 3b + c = 5$$

となるように $b = 1, c = 2$ とすると

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

となります．

(3) (1) から y' の符号は

$$y' < 0 \quad (x \neq 1, 3)$$

となりますから，増減表は

x		1		3	
y'	$-$	/	$-$	/	$-$
y	$\nearrow$	/	$\nearrow$	/	$\nearrow$

となります．次に無限遠方と不連続点を与える $x = 1, 3$ の近くでの漸近挙動について考えます．

$x \to \pm\infty$ のとき

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

において

$$\frac{1}{x-1} \to 0, \quad \frac{2}{x-3} \to 0$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} \to 1 + 0 + 0 = 0$$

となります．

$x \to 1 \pm 0$ のとき

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

において

$$\frac{1}{x-1} \to \pm\infty, \quad \frac{2}{x-3} \to -1$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} \to \pm\infty \quad \text{（複号同順）}$$

となります.

<u>$x \to 3 \pm 0$ のとき</u>

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

において

$$\frac{1}{x-1} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{x-3} \to \pm\infty$$

から

$$y = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} \to \pm\infty \quad \text{（複号同順）}$$

となります.

　最後に

$$y \gtreqqless 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \quad \mathrm{OR} \quad 1 < x < 2 \quad \mathrm{OR} \quad x > 3x = -1, 2 \\ -1 < x < 1 \quad \mathrm{OR} 2 < x < 3 \end{cases}$$

に注意して次のグラフを得ます.