森田.

Lec 08

2019/06/05

2019 年 5 月 29 日小テスト問題

I 以下の数列 $\{a_n\}$ に対して $n \to +\infty$ の極限を求める.

(1) $a_n = n^4 - n^2$ **(2)** $a_n = 4^n - 2^n$

解答 **(1)** $a_n = n^4 - n^2 = n^4(1 - \frac{1}{n^2})$ において $n \to +\infty$ のとき

$$n^4 \to +\infty,\ 1 - \frac{1}{n^2} \to 1 - 0 = 1 > 0$$

から

$$a_n = n^4(1 - \frac{1}{n^2}) \to +\infty$$

(別解)$a_n = n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1)$ において $n \to +\infty$ のとき

$$n^2 \to +\infty,\ n^2 - 1 \to +\infty$$

から

$$a_n = n^2(n^2 - 1) \to +\infty$$

(2) $a_n = 4^n(1 - \frac{1}{2^n})$ において $n \to +\infty$ のとき

$$4^n \to +\infty,\quad 1 - \frac{1}{2^n} \to 1 - 0 = 1 > 0$$

から

$$a_n = 4^n(1 - \frac{1}{2^n}) \to +\infty$$

(別解) $a_n = 2^n(2^n - 1)$ において $n \to +\infty$ のとき

$$2^n \to +\infty,\quad \underset{2^n}{\cancel{n^2}} - 1 \to +\infty$$

から

$$a_n = 2^n(2^n - 1) \to +\infty$$

II 以下の $f(x)$ に対して $x \to +\infty$ の極限を求める.

(1) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ **(2)** $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-2x+1}$

解答 $x \to +\infty$ のとき

$$\frac{1}{x} \to 0,\quad \frac{1}{x^2} \to 0,$$

であることを用います.

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} \\ &\to \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &\to \frac{0 - 1}{1 - 0 + 0} = -1 \end{aligned}$$

* $a_n \to +\infty$, $b_n \to \alpha > 0$

$\Rightarrow a_n \cdot b_n \to +\infty$

* $a_n \to +\infty$, $b_n \to \alpha \in \mathbb{R}$

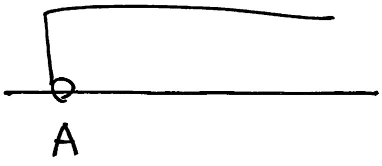
$\Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$

* $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n \cdot b_n \to +\infty$

---

* $a > 1$ のとき $a^n \to +\infty$



* $f, g : (A, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) \to \alpha$, $g(x) \to \beta$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (i) $f(x) \pm g(x) \to \alpha \pm \beta$

(ii) $f(x) g(x) \to \alpha\beta$

(iii) $g(x) \neq 0$, $\beta \neq 0$ のとき.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}$$

連続関数

Nobuyuki TOSE

June 06, 2018

連続関数 — 定義

$A < t_n < B$
$t_n \neq c$
$t_n \to c$
$\Rightarrow g(t_n) \to g(c) \quad (n \to +\infty)$

定義

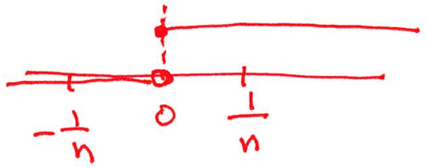
関数 $g\colon (A, B) \to \mathbf{R}$ があるとき，$g(t)$ が $t = c \in (A, B)$ で連続であるとは

$$g(t) \to g(c) \quad (t \to c)$$

さらに g が (A, B) 上 で連続であるとは $g(t)$ が任意の $t = a \in (A, B)$ で連続であるときです．

Example

Example 1



$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

について考えると

$$g(\frac{1}{n}) = 1 \to 1 \quad (n \to +\infty)$$
$$g(-\frac{1}{n}) = 0 \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

これは極限 $\lim_{t \to 0} g(t)$ が存在しないことを意味して，従って $g(t)$ は $t = 0$ で連続ではありません．

$\lim_{t \to 0} g(t) = \alpha$ ← 数列 $\{t_n\}$ に依らない．

$$\boxed{t_n \to 0 \text{ のとき } g(t_n) \to \alpha.}$$

Example

Example 2 多項式関数

$$g(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

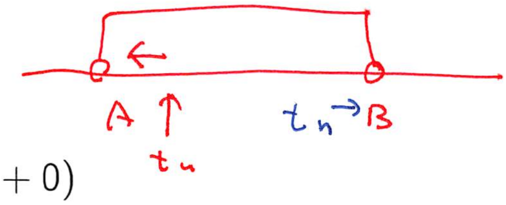
を考えます．$t^k \to t_0^k$ $(t \to t_0)$ なので

$$g(t) \to a_m t_0^m + a_{m-1} t_0^{m-1} + \cdots + a_1 t_0 + a_0 = g(t_0)$$

が任意の $t = t_0 \in \mathbf{R}$ で成立します．従って g は $\mathbf{R}$ で連続です．

右極限（Limit on the Right）

関数 $g:\ (A, B) \to \mathbf{R}$ に対して，t が A に近付くときの $g(t)$ の極限をどのように定義するか？



右極限

$$g(t) \to \alpha \quad (t \to A+0)$$

とは数列 $\{t_n\}$ が条件

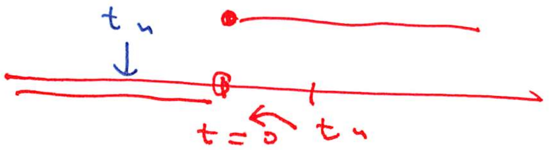
→ $g(t_n)$ が定義できる.

$$t_n \in (A, B),\ t_n \to A\ (n \to +\infty)$$

を満たすならば

$$g(t_n) \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

Example



Example 1 もう一度，関数

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

このとき

$t_n > 0,\ t_n \to 0$

$g(t_n) = 1 \to 1$

$(n \to +\infty)$

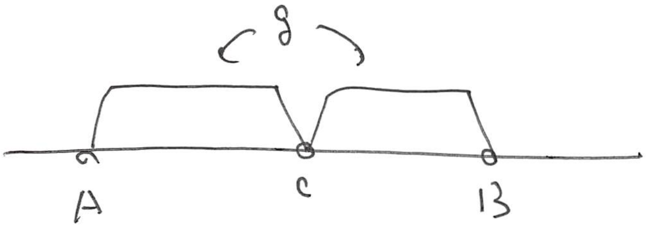
$$g(t) \to \overset{\substack{g(0) \\ \shortparallel}}{\boxed{1}} \quad (t \to +0)$$
$$g(t) \to 0 \quad (t \to -0)$$

$t_n < 0,\ t_n \to 0$

いま $g(0) = 1$ であるので，g は $t = 0$ で右連続であるといいます．

$g(t_n) = 0 \to 0$

$(n \to +\infty)$



$g(t) \to \alpha \quad (t \to c) \iff$

点列による定義

$A < t_n < B,\ t_n \neq c$

$t_n \to c$

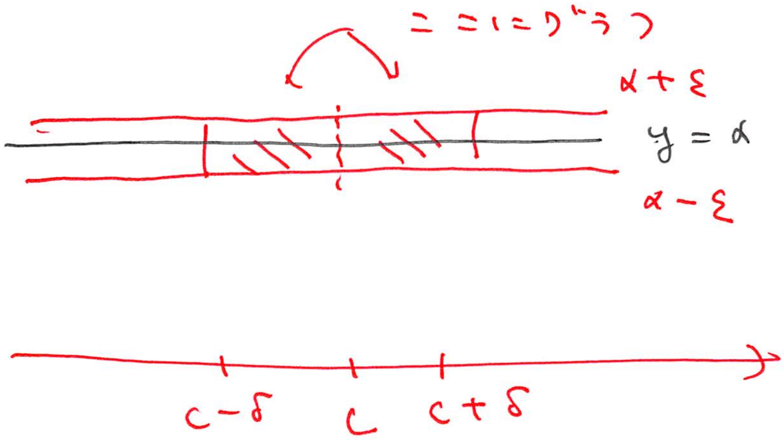
a とき $g(t) \to a$

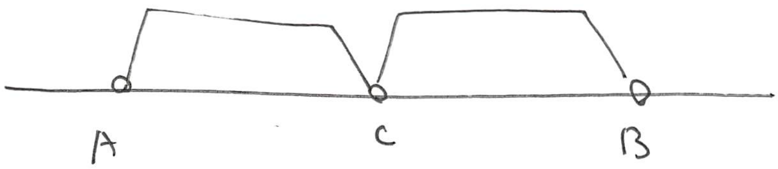
$\Updownarrow$ Hard to see.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$$\left.\begin{matrix} c-\delta < t < c+\delta \\ t \neq c \end{matrix}\right) \Longrightarrow \alpha - \varepsilon < g(t) < \alpha + \varepsilon$$

ここにグラフ





$$g : (A, c) \cup (c, B) \longrightarrow \mathbb{R}$$

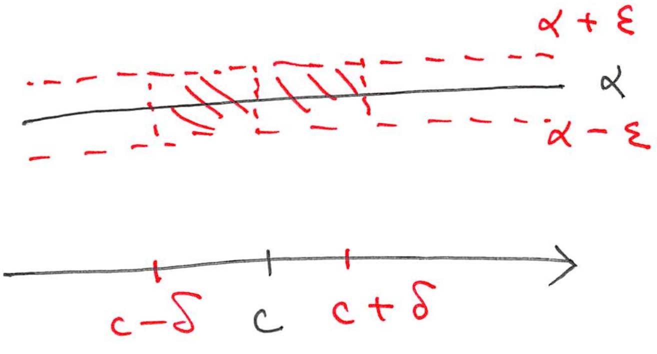
$$g(t) \longrightarrow \alpha \quad (t \to c)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left.\begin{array}{c} A < t_n < B \\ t_n \neq c \\ t_n \longrightarrow c \end{array}\right\} \Longrightarrow g(t_n) \longrightarrow \alpha \quad (n \to +\infty)$$

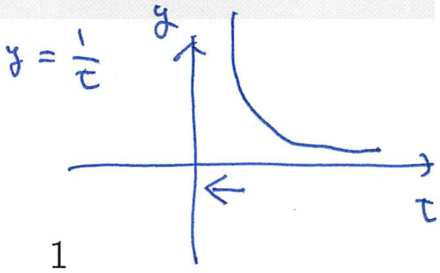
$$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

難かしい.

$$\left.\begin{array}{c} c - \delta < t < c + \delta \\ t \neq c \end{array}\right) \Longrightarrow \alpha - \varepsilon < g(t) < \alpha + \varepsilon$$



Another example

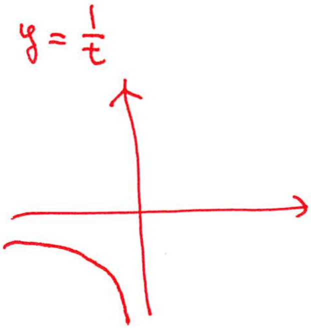


Example 3 関数

$$g(t) : (0, +\infty) \to \mathbf{R} \quad t \mapsto g(t) = \frac{1}{t}$$

を考えます． $g(t) \to +\infty \quad (t \to +0)$. 前回のプリント

Example 4 関数



$$g(t) : (-\infty, 0) \to \mathbf{R} \quad t \mapsto g(t) = \frac{1}{t}$$

を考えます． $g(t) \to -\infty \quad (t \to -0)$.

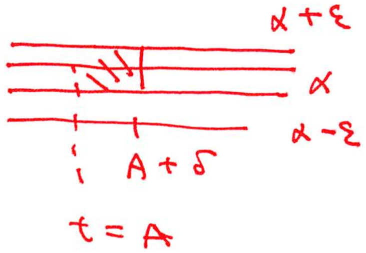
Remark

$A < t_n < B,\ t_n \to A$

$\Rightarrow g(t_n) \to \alpha$

$\Uparrow$

Remark (i)



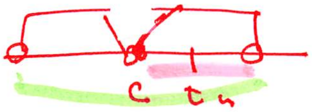
$$g(t) \to \alpha \in \mathbf{R} \quad (t \to A + 0)$$

$\Leftrightarrow$

任意の$\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して

$A < t < A + \delta \Rightarrow -\varepsilon + \alpha < g(t) < \varepsilon + \alpha$

Remark (ii) Given a function $f: (A, B) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$ に対して



両側 $f(t) \to \alpha \quad (t \to c \in (A, B))$

逆もOK.

ならば 左(右)極限.

$t_n = c + (-1)^n \frac{1}{n}$

$f(t) \to \alpha \quad (t \to c \pm 0 \in (A, B))$

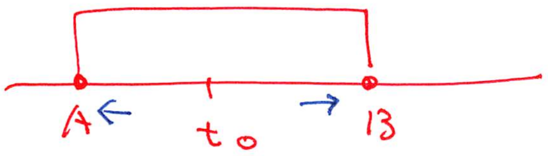
$A < t_n < B$

$t_n \neq c$

$t_n \to c$

+の場合 $c < t_n,\ t_n \to c$.

閉区間上の連続関数



定義

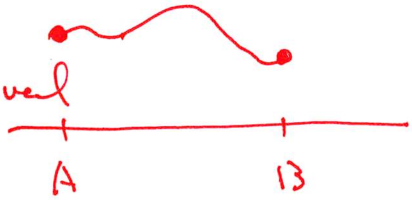
関数 $g: [A, B] \to \mathbf{R}$ に対して g が $[A, B]$ 上で連続であるとは

(i) $g(t) \to g(A) \quad (t \to A + 0)$ 右連続 at $t = A$

(ii) $g(t) \to g(B) \quad (t \to B - 0)$ 左連続 at $t = B$

(iii) $g(t)$ が任意の $t = t_0 \in (A, B)$ で連続

連続関数の最大値の定理

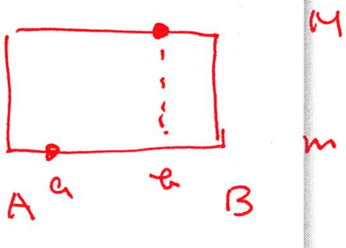


bounded closed interval
有界閉区間

定理

関数 $g: [A, B] \to \mathbf{R}$ $[A, B]$ 上で連続であるとします．このとき g には最大値 M と最小値 m が存在します．

$$m \leq g(t) \leq M \quad (A \leq t \leq B)$$



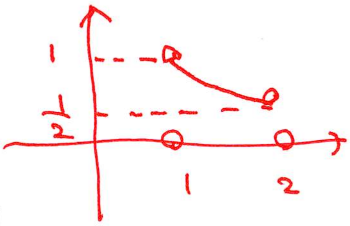
大事.

$$g(a) = m \quad \text{for some } a \in [A, B]$$

$$g(b) = M \quad \text{for some } b \in [A, B]$$

Rの完備性の定理から導かれる.

Examples

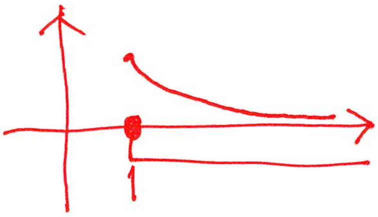


Example 5 関数

$$g_5 : \ (1, 2) \to \mathbf{R} \quad t \mapsto g_5(t) = \frac{1}{t}$$

は最大値も最小値ももたない.

Example 6 関数 連続.



$$g_6 : \ [1, +\infty) \to \mathbf{R} \quad t \mapsto g_6(t) = \frac{1}{t}$$

閉区間

$t \to t_0 \neq 0$

$\rightsquigarrow \frac{1}{t} \to \frac{1}{t_0}$

最大値 1 を $t = 1$ でとるが最小値をもたない.

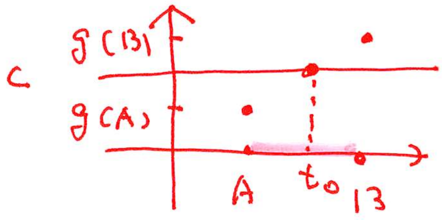
$0 = \frac{1}{t}$

を満たす $t \in [1, +\infty)$ は存在しない

$0 \leq \frac{1}{t}$ は OK

$t \in [1, +\infty)$

中間値の定理（Intermediate Value Theorem）



中間値の定理（Intermediate Value Theorem）

関数 $g : \ [A, B] \to \mathbf{R}$ が以下の条件を満たすとします.

(i) g は $[A, B]$ 上連続である.

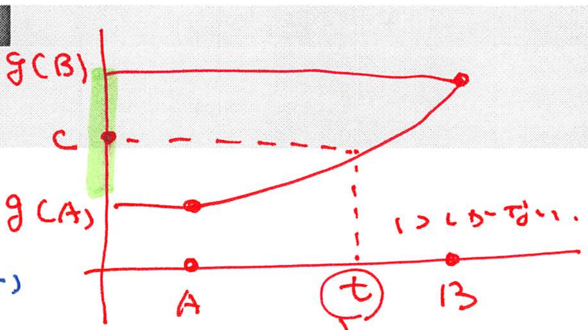
(ii) $g(A) < g(B)$.

このとき任意の $c \in (g(A), g(B))$ に対して $t_0 \in (A, B)$ が存在して

$$g(t_0) = c$$

R の完備性を用いた.

逆関数定理



$g(s)=c$
$g(t)=c$
$s<t \leadsto \overset{c}{\overset{\shortparallel}{g(s)}} < \overset{c}{\overset{\shortparallel}{g(t)}}$

定理

Given a function $g:\ [A,B]\to\mathbf{R}$ and assume the following conditions:
(i) g は $[A,B]$ 上で連続である.
(ii) g is 狭義の増加関数 *i.e.*

$$A\le s<t\le B\ \Rightarrow g(s)<g(t)$$

$g(s)\le g(t)$
広義の
単調増加

このとき g の逆関数

$c \longmapsto t$

$$g^{-1}:\ [g(A),g(B)]\to\mathbf{R}$$

が存在して $[g(A),g(B)]$ 上で連続となります.

ここまで.

指数関数の連続性 (1)

補題 1

$a>1$ のとき

$$0<a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{a}{n}$$

$$-\frac{a}{n}<a^{-\frac{1}{n}}-1<0$$

$a^{\frac{1}{n}}=1+\alpha_n$ とすると $\alpha_n>0$ となり

$$a=(1+\alpha_n)^n>n\alpha_n$$

であることが 2 項定理から従います.

$$a^{\frac{1}{n}}-1=\alpha_n<\frac{a}{n}$$

ネピアの数 e

Nobuyuki TOSE

June 05, 2019

Nepier's Number

利息を計算 compound.

Nepier's Number

以下の数列について考えよう．

1年後の元利合計.

100% 年利.

100 r %

$r = 0.01 \leftrightarrow 1\%$

$e_1 = \left(1 + \frac{r}{1}\right)^1$

$$e_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2.000$$

$e_2 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$

$$e_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.250$$

$\frac{1}{2}$ 年複利

$1 \mapsto 1 + \frac{1}{2}$

$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \rightarrow$

$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$

$e_3 = \left(1 + \frac{r}{3}\right)^3$

$$e_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370$$

$e_4 = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4$

$$e_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.441$$

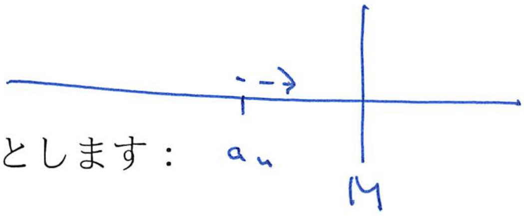
$$\vdots$$

$e_n = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \rightarrow e^r$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e = 2.71\cdots$$

瞬間複利.

上に有界な単調増加数列の収束



定理

無限数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ は単調増加であるとします：

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le a_{n+1} \le \dots$$

さらに $\{a_n\}$ は上に有界であるとします：正数 $M > 0$ が存在して

$$a_n \le M \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

このとき $\{a_n\}$ は収束します.

The proof of the theorem is highly transcendental. We are going to work on the assumption of it.

$\mathbb{R}$の完備性.

---

e_n の収束 (1)

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
= \;& 1 + {}_nC_1\frac{1}{n} + {}_nC_2\frac{1}{n^2} + {}_nC_3\frac{1}{n^3} + \dots + {}_nC_k\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} \\
= \;& 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots \\
& \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdots 1}\cdot\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} \\
= \;& 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots \\
& \dots + \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots \\
& \dots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Ⅰ (1) $y = \dfrac{x^2}{x+1} = x + A + \dfrac{B}{x+1}$

となる A, B を求めよ.

$\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x(x+1) - x}{x+1}$

(2) y' を求めて増減表を求める

x		-1	
y'			
y		‖	

(3) グラフを描く.

$x \to -1+0$ $x \to +\infty$

$-1-0$ $x \to -\infty$

Ⅱ $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ (1) 微分する. (2) 増減表を求める.