2019年5月29日小テスト問題

I 以下の数列 $\{a_n\}$ に対して $n \to +\infty$ の極限を求める.
(1) $a_n = n^4 - n^2$ **(2)** $a_n = 4^n - 2^n$

解答 **(1)** $a_n = n^4 - n^2 = n^4(1 - \frac{1}{n^2})$ において $n \to +\infty$ のとき

$$n^4 \to +\infty,\ 1 - \frac{1}{n^2} \to 1 - 0 = 1 > 0$$

から

$$a_n = n^4(1 - \frac{1}{n^2}) \to +\infty$$

(別解)$a_n = n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1)$ において $n \to +\infty$ のとき

$$n^2 \to +\infty,\ n^2 - 1 \to +\infty$$

から

$$a_n = n^2(n^2 - 1) \to +\infty$$

(2) $a_n = 4^n(1 - \frac{1}{2^n})$ において $n \to +\infty$ のとき

$$4^n \to +\infty, \quad 1 - \frac{1}{2^n} \to 1 - 0 = 1 > 0$$

から

$$a_n = 4^n(1 - \frac{1}{2^n}) \to +\infty$$

(別解) $a_n = 2^n(2^n - 1)$ において $n \to +\infty$ のとき

$$2^n \to +\infty, \quad n^2 - 1 \to +\infty$$

から

$$a_n = 2^n(2^n - 1) \to +\infty$$

II 以下の $f(x)$ に対して $x \to +\infty$ の極限を求める.
(1) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ **(2)** $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-2x+1}$

解答 $x \to +\infty$ のとき

$$\frac{1}{x} \to 0, \quad \frac{1}{x^2} \to 0,$$

であることを用います.

(1)

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} \to \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

(2)

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \to \frac{0 - 1}{1 - 0 + 0} = -1$$