2.4　無限遠

Lec07 2019 年 5 月 29 日演習問題

I 以下の数列 $\{x_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

が成立することを示しましょう.

(1) $x_n = \frac{8n^2-3}{2n+5}$ **(2)** $x_n = \frac{n^3-n}{n^2+1}$ **(3)** $x_n = \frac{4^n-2^n}{3^n+2^n}$

解答 **(1)**

$$x_n = \frac{8n^2-3}{2n+3} = n\cdot\frac{8n^2-3}{n(2n+3)} = n\cdot\frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}$$

において $n\to+\infty$ のとき

$$n\to+\infty,\quad \frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}} \to \frac{8-0}{2+0} = 4 > 0$$

なので

$$x_n = n\cdot\frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}} \to +\infty$$

となります.

(2)

$$x_n := \frac{n^3-n}{2n+5} = n^2\cdot\frac{n^3-n}{n^2(2n+5)} = n^2\cdot\frac{1-\frac{1}{n^2}}{(2+\frac{5}{n})}$$

において $n\to+\infty$ のとき

$$n^2\to+\infty,\quad \frac{1-\frac{1}{n^2}}{(2+\frac{5}{n})} \to \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2} > 0$$

なので

$$x_n = n^2\cdot\frac{1-\frac{1}{n^2}}{(2+\frac{5}{n})} \to +\infty$$

(3)

$$x_n := \frac{4^n-2^n}{3^n+2^n} = \frac{4^n}{3^n}\cdot\frac{3^n(4^n-2^n)}{4^n(3^n+2^n)} = \left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

において $n\to+\infty$ のとき

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n\to+\infty,\quad \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \to \frac{1-0}{1+0} = 1 > 0$$

から

$$x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \to +\infty$$

II 以下の関数 $f(x)$ に対して極限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めましょう．
(1) $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$ **(2)** $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ **(3)** $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2+4}$ **(4)** $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1}$ **(5)** $f(x) = \frac{x+3}{x^2+5x+6}$

解答 **(1)** $x \to +\infty$ のとき

$$f(x) := \frac{x}{x^2+5} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+5} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{5}{x^2}} \to 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0$$

(2) $x \to +\infty$ のとき

$$f(x) := \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} \to \frac{2+0}{1-0} = 2$$

(3) $x \to +\infty$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2+4} = \frac{(x^2+2x+4)-(x^2+4)}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} \to \frac{2}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

(4)

$$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1} = x\cdot\frac{x^2+5x+6}{x(x+1)} = x\cdot\frac{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x})}$$

において $x \to +\infty$ のとき

$$x \to +\infty, \quad \frac{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x})} \to \frac{1+5\cdot 0+6\cdot 0}{1+0} = 1 > 0$$

であるので

$$f(x) = x\cdot\frac{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x})} \to +\infty$$

(5) $x \to +\infty$ のとき

$$f(x) := \frac{x+3}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x(x+3)}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{3}{x}}{1+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}} \to 0\cdot\frac{1+0}{1+5\cdot 0+6\cdot 0} = 0\cdot 1$$

III 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が

$$x_n \to +\infty, \quad y_n \to \alpha \in \mathbf{R} \quad (n \to +\infty)$$

を満たします．このとき

$$x_n + y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

が成立することを示しましょう．

解答 $y_n \to \alpha (n \to +\infty)$ から

$$\exists N_0\, (n \geq N_0 \Rightarrow \alpha - 1 < y_n < \alpha + 1)$$

であることが分かります．$x_n \to +\infty (n \to +\infty)$ から，任意の $R > 0$ に対して

$$\exists N_1 \, (n \geq N_1 \Rightarrow R - (\alpha - 1) < x_n)$$

であることが分かります．このとき $n \geq N := \max(N_0, N_1)$ ならば $n \geq N_0$ かつ $n \geq N_1$ なので

$$R = (\alpha - 1) + R - (\alpha + -) < x_n + y_n$$

が成立します．これから

$$x_n + y_n \to +\infty$$

であることが分かります．