無限遠方の極限

Nobuyuki TOSE

Lec07, May 29, 2019 V02

$+\infty$ に発散する数列 (1)

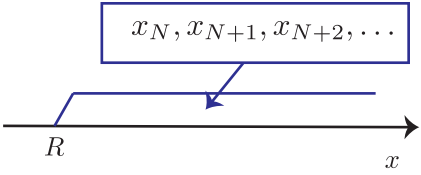
Definition

数列 $\{x_n\}$ が無限遠方に発散する：

$$x_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

とは，任意の $R > 1$ に対して番号 N が存在して

$$R < x_n \quad (n \geq N)$$



$+\infty$ に発散する数列 (2)

Example 1 $x_n = n\ (\quad n = 1, 2, 3, \dots)$ とすると

$$x_n \to +\infty$$

$\forall R > 1$ を取ります．このとき

$$R - 1 < [R] \leq R$$

なので $N = [R] + 1$ とします．$n \geq N$ ならば

$$R < [R] + 1 = N \leq n$$

定理 1

(1) $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ ならば

$$x_n y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty), \quad x_n y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

(2) $x_n \to +\infty$, $y_n \to \alpha > 0$ （$n \to +\infty$）ならば

$$x_n + y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

(3) (追し出しの定理) $x_n \to +\infty$ （$n \to +\infty$）で

$$x_n \leq y_n \quad (n \geq N_0)$$

を満たす番号 N が存在するならば

$$y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

定理1（証明を少し）(1)

定理 1(1) $\forall R > 1$ を取ります． $x_n \to +\infty$ から

$$\exists N_1 \, (n \geq N_1 \Rightarrow 1 < R < x_n)$$

$y_n \to +\infty$ から

$$\exists N_2 \, (n \geq N_2 \Rightarrow 1 < R < y_n)$$

$N := \max(N_1, N_2)$ として $n \geq N$ ならば $n \geq N_1$ かつ $n \geq N_2$ なので

$$R < R + R < x_n + y_n, \quad R = 1 \cdot R < R \cdot R < x_n \cdot y_n$$

から

$$x_n + y_n \to +\infty, \quad x_n y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

定理 1（証明を少し）(2)

定理 1(2) (3) を使います．$y_n \to \alpha > 0$ なので，ある番号 N_0 が存在して

$$n \geq N_0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < y_n < \frac{3\alpha}{2}$$

が成立します．従って

$$\frac{\alpha}{2} \cdot x_n < x_n y_n \quad (n \geq N_0)$$

さらに $\alpha > 0$ から

$$\frac{\alpha}{2} \cdot x_n \to +\infty$$

も示せますから (3) によって

$$x_n y_n \to +\infty$$

定理１（証明を少し）(2)

定理 1(3)　$\forall R > 1$ を取ります．$x_n \to +\infty$ から

$$\exists N_1 \,(n \geq N_1 \Rightarrow R < x_n)$$

が成立します．$N = \max(N_0, N_1)$ に対して $n \geq N_0$ かつ $n \geq N_1$ から

$$R < x_n \leq y_n$$

となります．

定理 1 に対するコメント

Example 2 定理 1 の (1) から

$$n^2 \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

Example 3 $a_n = n^2 - n$ とする．これを $a_n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ と変形すると

$$a_n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to +\infty$$

実際 $n^2 \to +\infty$ と $1 - \frac{1}{n} \to 1 > 0$ から定理 1 の (2) が適用できる．
Remark The Part (3) is called PUSH OUT Theorem in Japan. It means OSHIDASHI, a winning trick of the Sumou.

定理 1 に対するコメント (2)

Example 4 $a > 1$ ならば

$$a^n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

実際 $a = 1 + \theta$ とすると $\theta > 0$ であり，2 項定理から

$$a^n = (1+\theta)^n = 1 + n\theta + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \theta^2 + \cdots + \theta^n > \theta n$$

が従う．他方 $\theta \cdot n \to +\infty$ であるので，定理 1(3) から $a^n \to +\infty$.

定理 2

定理 2

(1) すべての番号 n に対して $x_n \neq 0$ で，$x_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ ならば

$$\frac{1}{x_n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

(2) $a_n > 0$ が任意の n に対して成立して，$a_n \to 0$ ならば

$$\frac{1}{a_n} \to +\infty$$

定理 2(1)–証明

$\forall \varepsilon > 0$ を取ります．そして $R := \frac{1}{\varepsilon} > 0$ とします．このとき $x_n \to +\infty$ から

$$\exists N \, (n \geq N \Rightarrow R < x_n)$$

これから $n \geq N$ ならば

$$0 < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{R} = \varepsilon$$

であることが分かります．

(2) も同様です．任意の $R > 1$ に対して $\varepsilon = \frac{1}{R}$ と定めます．

無限遠方の極限 (1)

$g:\ (A, +\infty) \to \mathbf{R}$

(1)

$$g(x) \to \alpha \in \mathbf{R} \quad (x \to +\infty)$$

とは条件

$$x_n \in (A, +\infty), \quad x_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

を満たす数列 $\{x_n\}$ が必ず

$$g(x_n) \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

を満たすときである.

無限遠方の極限 (2)

無限遠方の極限 (2)

(2)

$$g(x) \to +\infty \quad (x \to +\infty)$$

とは条件

$$x_n \in (A, +\infty), \quad x_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

を満たす数列 $\{x_n\}$ が必ず

$$g(x_n) \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

を満たすときである.

同値な定義（Equivallent Definitions）

(1) $g(x) \to \alpha \in \mathbf{R}$ $(x \to +\infty)$ if and only if for any $\varepsilon > 0$, we can find $R > 0$ satisfying

$$\alpha - \varepsilon < g(t) < \alpha + \varepsilon \quad (t > R)$$

(2) $g(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ if and only if for any $R > 1$, we can find $R_0 > 0$ satisfying

$$R < g(t) \quad (R_0 < t)$$

Examples

Example 5 We consider

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

Then

$$g(x) \to 0 \quad (x \to +\infty)$$

Take a sequence $\{x_n\}$ satisfying

$$x_n > 0, \quad x_n \to +\infty$$

Then it follows from Theorem 2 that

$$g(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

Theorem 3

2 つの関数

$$f(x):\ (A,+\infty)\to \mathbf{R},\quad g(x):\ (A,+\infty)\to \mathbf{R}$$

が $x\to+\infty$ のとき

$$f(x)\to\alpha\in\mathbf{R},\quad g(x)\to\beta\in\mathbf{R}$$

を満たすとする.
(1) $f(x)\pm g(x)\to\alpha\pm\beta\ (x\to+\infty)$
(2) $f(x)g(x)\to\alpha\beta\ (x\to+\infty)$
(3) $g(x)\neq 0\ (x>A)$ で $\beta\neq 0$ とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{\alpha}{\beta}\ (x\to+\infty)$$