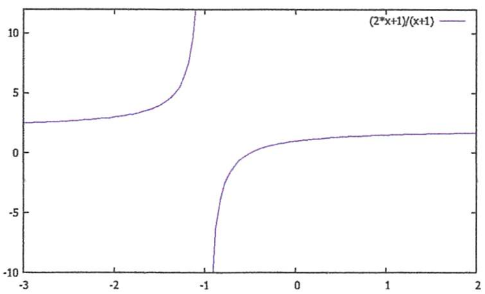
2019年5月22日小テスト解答

I $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ のグラフを描きましょう.

解答

GNU plot



$$y = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$$

から右図となる.

II 以下の $f(x)$ に対して導関数 $f'(x)$ を求めましょう.

(1) $f(x) = x^3\sqrt{x}$ **(2)** $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$
(3) $f(x) = \frac{x-1}{3x+1}$ **(4)** $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$
(5) $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ $(x>1)$
(6) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$
(7) $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

解答 (1) $f(x) = x^3\sqrt{x}.$

$$\left(x^{\frac{7}{2}}\right)' = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)'\sqrt{x} + x^3(\sqrt{x})' \\ &= 3x^2\sqrt{x} + x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 3x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x} \end{aligned}$$

$x^3\frac{1}{\sqrt{x}} = x^2\sqrt{x}$

$\leftarrow x^{\frac{5}{2}}$

(2) $u = x+1$ とすると $y = \frac{1}{u^2}$ となるので

$y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{2}{u^3}\cdot 1 = -\frac{2}{(x-1)^3}$$

(3) $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)'(3x+1) - (x-1)(3x+1)'}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{1\cdot(3x+1) - (x-1)\cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{4}{(3x+1)^2} \end{aligned}$$

(4) $u = x^2+x+1$ とすると $y = \sqrt{u}$ ですから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

(5) まず $y = \sqrt{x^2-1}$ の導関数を求めます. $u = x^2-1$ とすると $y = \sqrt{u}$ ですから

$\left(\sqrt{x^2-1}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

が分かります. さらに $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'\sqrt{x^2-1} + x(\sqrt{x^2-1})' \\ &= 1\cdot\sqrt{x^2-1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{(x^2-1)+x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \end{aligned}$$

$x>1$ が定義域なので. $2x^2>2$

(6)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)'\sqrt{x} + (x-1)(\sqrt{x})' \\ &= 1\cdot\sqrt{x} + (x-1)\cdot\frac{1}{\boxed{2\sqrt{x}}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} + (x-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(7) $u = 1+x^2$ とすると $y = \frac{1}{u^2}$ となりますから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{2}{u^3}\cdot 2x = -\frac{4x}{(1+x^2)^3}$$

$y = f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{(Leibnitz Rule)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

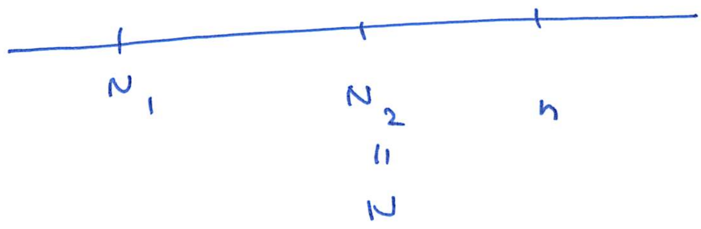
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

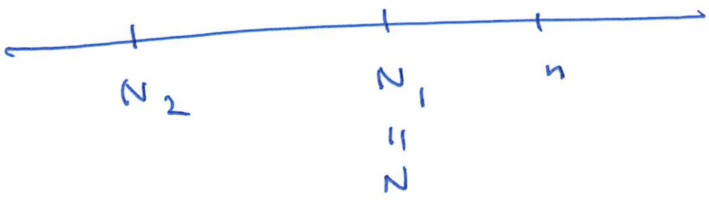
$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

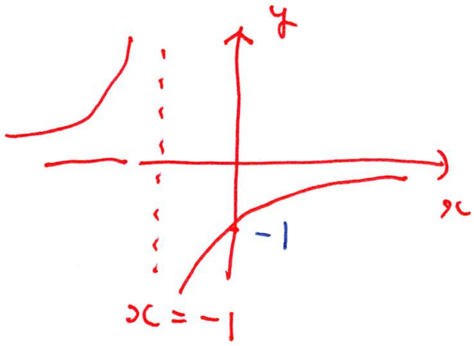
$N = \max(N_1, N_2) \leq n$ とすると

$N_1 \leq n$ かつ $N_2 \leq n$

☺ 下の2通りに場合分けする.

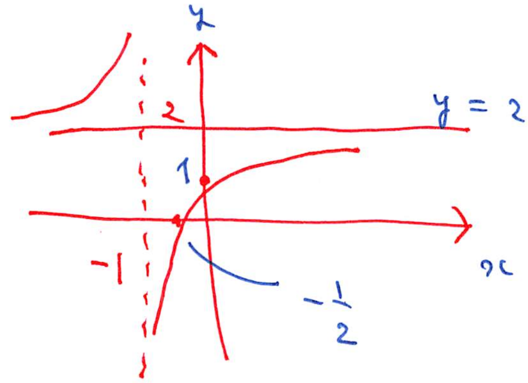






$y = -\frac{1}{x+1}$

$y = \frac{2x+1}{x+1}$



(6) $x > 0$

$\sqrt{x} \to 0$

$(x \to +0)$

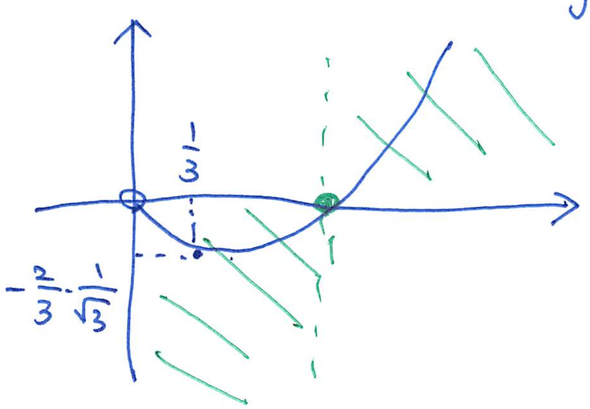
x	(0)		$\frac{1}{3}$	
f'	/	$-$	0	$+$
f	(0)	$\searrow$		$\nearrow$

$$f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

$\vee$
0

$$f'(x) \gtreqless 0 \iff 3x-1 \gtreqless 0$$

$$\iff x \gtreqless \frac{1}{3}$$



$\boxed{x > 0}$

$$y = (x-1)\sqrt{x} \gtreqless 0$$

$$\iff x \gtreqless 1$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\sqrt{x} \to 0 \quad (x \to 0)$

$f'(x) \gtreqless 0$

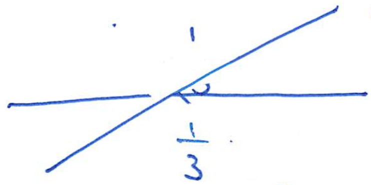
$\iff 3x - 1 \gtreqless 0$

$\iff x \gtreqless \frac{1}{3}$

x	(0)		$\frac{1}{3}$	
f'		$-$	0	$+$
f	(0)	$\searrow$		$\nearrow$

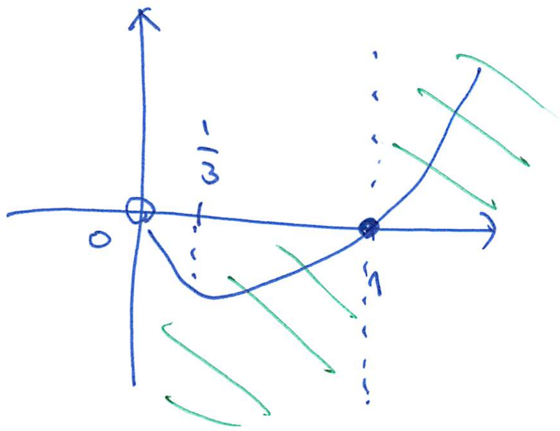
$$f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

$2\sqrt{x} > 0$



$f(x) = (x-1)\sqrt{x}$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$y = (x-1)\sqrt{x} \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 1$

$\sqrt{x} > 0$

無限遠方の極限

Nobuyuki TOSE

May 29, 2019

$+\infty$ に発散する数列 (1)

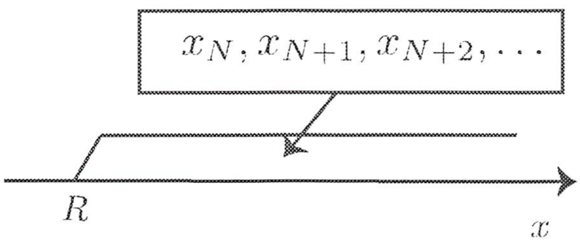
Definition

数列 $\{x_n\}$ が無限遠方に発散する： diverge , divergent

$$x_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

とは，任意の $R > 1$ に対して番号 N が存在して

$$R < x_n \quad (n \geq N)$$



$+\infty$ に発散する数列 (2)

Example 1 $x_n = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とすると

$$x_n \to +\infty$$

$\forall R > 1$ を取ります．このとき

$$R - 1 < [R] \le R$$

なので $N = [R] + 1$ とします．$n \ge N$ ならば

$$R < [R] + 1 = N \le n$$

$N = [R] + 1$ Gauss 記号

R　N+1, N+2 ...

[100.1] = 100

[100] = 100

N+1　N+2 ...

R　[R]+1 = N

定理

定理 1

(1) $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ ならば

$$x_n y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty), \quad x_n + y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

(2) $x_n \to +\infty$, $y_n \to \alpha > 0$ （$n \to +\infty$）ならば

$$x_n y_n \to +\infty, \quad \cancel{x_n + y_n \to +\infty} \quad (n \to +\infty)$$

$x_n \to +\infty$

$y_n \to \alpha \in \mathbb{R}$

$x_n + y_n \to +\infty$

(3) (追し出しの定理) $x_n \to +\infty$ （$n \to +\infty$）で

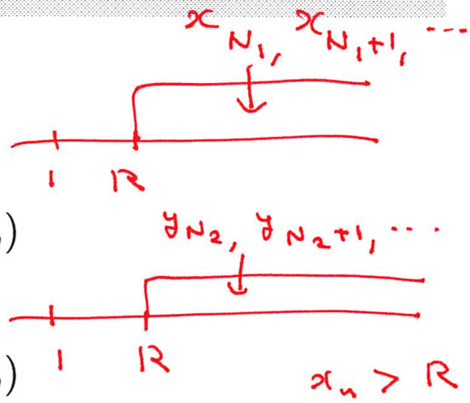
$$x_n \le y_n \quad (n \ge N_0)$$

を満たす番号 N が存在するならば

$$y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

定理 1（証明を少し）(1)

定理 1(1) $\forall R > 1$ を取ります．$x_n \to +\infty$ から



$$\exists N_1 \,(n \geq N_1 \Rightarrow 1 < R < x_n)$$

$y_n \to +\infty$ から

$$\exists N_2 \,(n \geq N_2 \Rightarrow 1 < R < y_n)$$

$x_n > R$
$y_n > R$

$N := \max(N_1, N_2)$ として $n \geq N$ ならば $n \geq N_1$ かつ $n \geq N_2$ なので

$$R < R + R < x_n + y_n R = 1 \cdot R < R \cdot R < x_n \cdot y_n$$

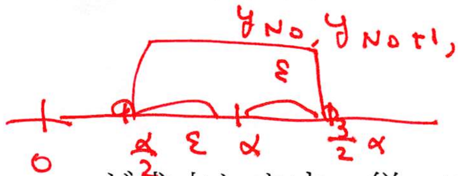
から

$$x_n + y_n \Rightarrow +\infty, \quad x_n y_n \not\Rightarrow +\infty \quad (n \to +\infty)$$

$\to$ $\to$

定理 1（証明を少し）(2)

定理 1(2) (3) を使います．$y_n \to \alpha > 0$ なので，ある番号 N_0 が存在して



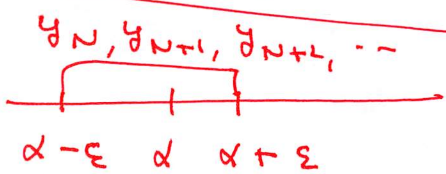
$$n \geq N_0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < y_n < \frac{3\alpha}{2}$$

$\varepsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$

$y_n \to \alpha$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ に対して
$\exists N$ が存在して
$n \geq N \Rightarrow \alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon$



が成立します．従って

$$\frac{\alpha}{2} \cdot x_n < x_n y_n \quad (n \geq N_0)$$

さらに $\alpha > 0$ から

自分で考えてみる．

$x_n \to +\infty$ から分かる．

$$\boxed{\frac{\alpha}{2} \cdot x_n \to +\infty}$$

定義を使う．

も示せますから (3) によって

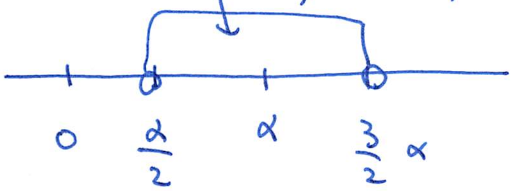
$$x_n y_n \to +\infty$$

$y_n \to \alpha \ (n \to +\infty) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N$

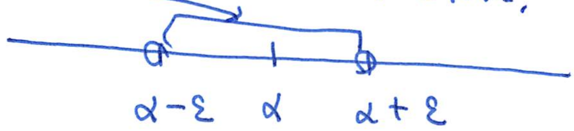
$(n \geq N \Rightarrow \alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon)$

$\varepsilon = \frac{\alpha}{2} \quad \exists N_0$

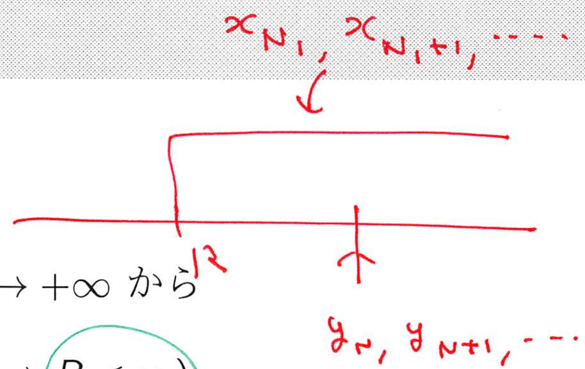
$y_{N_0}, y_{N_0+1}, \dots$



$y_N, y_{N+1}, y_{N+2}, \dots$



定理 1（証明を少し）(2)



定理 1(3)　$\forall R > 1$ を取ります．$x_n \to +\infty$ から

$$\exists N_1 \, (n \geq N_1 \Rightarrow R < x_n)$$

が成立します．$N = \max(N_0, N_1)$ に対して $n \geq N_0$ かつ $n \geq N_1$ から

$$R < x_n \leq y_n \quad (n \geq N)$$

となります．

$x_n \leq y_n \quad (n \geq N_0)$

定理 1 に対するコメント

Example 2 定理 1 の (1) から

$$n^2 \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

$= n(n-1) \to +\infty$

Example 3 $a_n = n^2 - n$ とする．これを $a_n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ と変形すると

$$a_n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to +\infty$$

$n - 1 \to +\infty$

実際 $n^2 \to +\infty$ と $1 - \frac{1}{n} \to 1 > 0$ から定理 1 の (2) が適用できる．
Remark The Part (3) is called PUSH OUT Theorem in Japan. It means OSHIDASHI, a winning trick of the Sumou.

定理1に対するコメント(2)

$-1 < a < 1$ のとき $a^n \to 0$

$a = 1$ のとき $1^n = 1 \to 1$

Example 4 $a > 1$ ならば

$$a^n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

実際 $a = 1 + \theta$ とすると $\theta > 0$ であり，2項定理から

$$a^n = (1+\theta)^n = 1 + n\theta + \boxed{\frac{n(n-1)}{2}\cdot\theta^2 + \cdots + \theta^n} > \theta n$$

が従う．他方 $\theta \cdot n \to +\infty$ であるので，定理1(3) から $a^n \to +\infty$.

定理1(2) $\theta \to \theta$ $(n \to +\infty)$ $\theta > 0$

定理2

$-\frac{1}{|x_n|} \le \frac{1}{x_n} \le \frac{1}{|x_n|}$ はさみうち．

(1)から $\frac{1}{|x_n|} \to 0$

(1)' $|x_n| \to +\infty$, $x_n \neq 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{x_n} \to 0$

定理2

(1) すべての番号 n に対して $x_n \neq 0$ で，$x_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ ならば

$$\frac{1}{x_n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

(2) $a_n > 0$ が任意の n に対して成立して，$a_n \to 0$ ならば

$$\frac{1}{a_n} \to +\infty$$

定理2(1)–証明

$\forall\varepsilon > 0$ を取ります．そして $R := \frac{1}{\varepsilon} > 0$ とします．このとき $x_n \to +\infty$ から

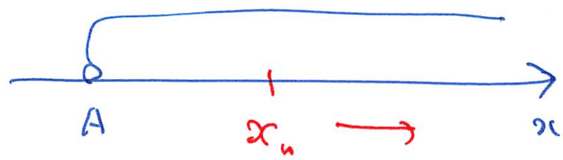
$$\exists N\,(n \geq N \Rightarrow R < x_n)$$

これから $n \geq N$ ならば

$$0 < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{R} = \varepsilon$$

であることが分かります．
(2) も同様です．任意の $R > 1$ に対して $\varepsilon = \frac{1}{R}$ と定めます．

無限遠方の極限 (1)



無限遠方の極限 (1)
$g:\ (A, +\infty) \to \mathbf{R}$
(1)

$$g(x) \to \alpha \in \mathbf{R} \quad (x \to +\infty)$$

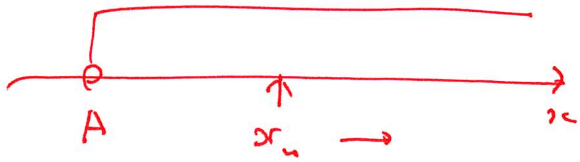
とは条件

$$x_n \in (A, +\infty), \quad x_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

を満たす数列 $\{x_n\}$ が必ず　$g(x_n)$ が定義されるため

$$g(x_n) \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

を満たすときである．



無限遠方の極限 (2)

(2)

$$g(x) \to +\infty \quad (x \to +\infty)$$

とは条件

$$x_n \in (A, +\infty), \quad x_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

を満たす数列 $\{x_n\}$ が必ず

$$g(x_n) \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

を満たすときである.

$x \to +\infty$ のとき

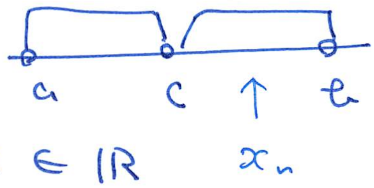
(1) $g(x) \to \alpha \in \mathbf{R}$ if and only if for any $\varepsilon > 0$, we can find $R > 0$ satisfying

$$\alpha - \varepsilon < g(t) < \alpha + \varepsilon \quad (t > R)$$

(2) $g(x) \to +\infty$ if and only if for any $R > 1$, we can find $R_0 > 0$ satisfying

$$R < g(t) \quad (R_0 < t)$$

$f : (a, c) \cup (c, b) \to \mathbb{R}$



$x \to c$ のとき $f(x) \to \alpha \in \mathbb{R}$

定義

$\iff \left(a < x_n < b,\ x_n \neq c,\ x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to \alpha \right)$

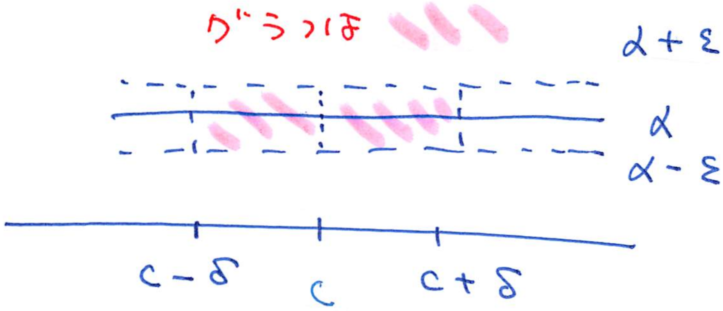
難しい

$\iff \forall \varepsilon > 0$

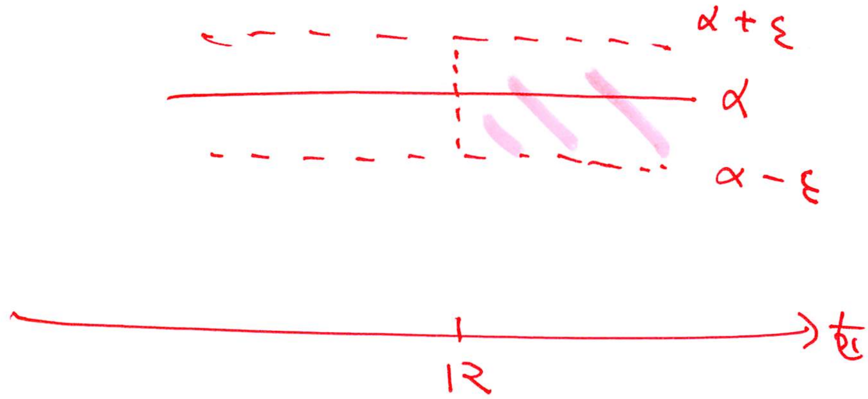
$\exists \delta > 0$

$0 < |x - c| < \delta$

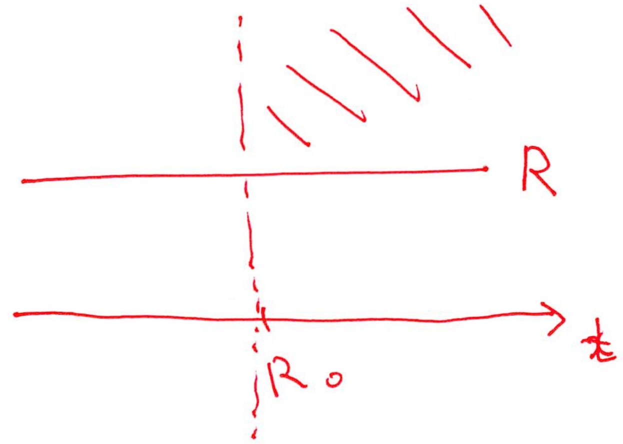
$\Rightarrow \alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$



(1)



(2)



Examples

Example 5 We consider

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

Then

$$g(x) \to 0 \quad (x \to +\infty)$$

Take a sequence $\{x_n\}$ satisfying

$$x_n > 0, \quad x_n \to +\infty$$

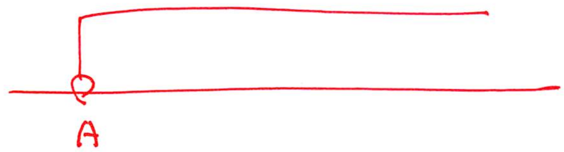
Then it follows from Theorem 2 that

$$g(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

Theorem 3

Theorem 3

2 つの関数



$$f(x): \ (A, +\infty) \to \mathbf{R}, \quad g(x): \ (A, +\infty) \to \mathbf{R}$$

が $x \to +\infty$ のとき

$$f(x) \to \alpha \in \mathbf{R}, \quad g(x) \to \beta \in \mathbf{R}$$

を満たすとする.

(2) $A < x_n$, $x_n \to +\infty$

(1) $f(x) \pm g(x) \to \alpha \pm \beta$ $(x \to +\infty)$

$f(x_n) \to \alpha$

(2) $f(x)g(x) \to \alpha\beta$ $(x \to +\infty)$

$g(x_n) \to \beta$

(3) $g(x) \neq 0$ $(x > A)$ で $\beta \neq 0$ とすると $\longrightarrow$ $f(x_n) g(x_n) \to \alpha\beta$ $(n \to +\infty)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{\alpha}{\beta} \ (x \to +\infty)$$

I 以下の $\{a_n\}$ に対して $n \to +\infty$ の極限を求めよ.

(1)

$$a_n = n^4 - n^2$$

(2) $$a_n = 4^n - 2^n$$

II 以下の $f(x)$ に対して $x \to +\infty$ の極限を求めよ

(1) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ (2) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-2x+1}$