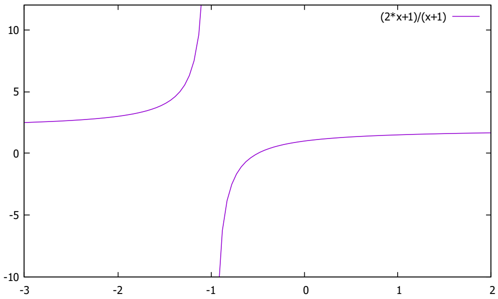
2019 年 5 月 22 日小テスト解答

I $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ のグラフを描きましょう．

解答

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2(x+1)-1}{x+1} \\
&= 2 - \frac{1}{x+1}
\end{aligned}
$$

から右図となる．



II 以下の $f(x)$ に対して導関数 $f'(x)$ を求めましょう．

(1) $f(x) = x^3\sqrt{x}$ **(2)** $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

(3) $f(x) = \frac{x-1}{3x+1}$ **(4)** $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

(5) $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ $(x > 1)$

(6) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$

(7) $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

解答 **(1)**

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^3)'\sqrt{x} + x^3(\sqrt{x})' \\
&= 3x^2\sqrt{x} + x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= 3x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}
\end{aligned}
$$

(2) $u = x+1$ とすると $y = \frac{1}{u^2}$ となるので

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{2}{u^3}\cdot 1 = -\frac{2}{(x+1)^3}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-1)'(3x+1) - (x-1)(3x+1)'}{(3x+1)^2} \\
&= \frac{1\cdot(3x+1) - (x-1)\cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{4}{(3x+1)^2}
\end{aligned}
$$

(4) $u = x^2+x+1$ とすると $y = \sqrt{u}$ ですから

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x+1) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}
$$

(5) まず $y = \sqrt{x^2-1}$ の導関数を求めます．$u = x^2-1$ とすると $y = \sqrt{u}$ ですから

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}
$$

が分かります．さらに

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x)'\sqrt{x^2-1} + x(\sqrt{x^2-1})' \\
&= 1\cdot\sqrt{x^2-1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{(x^2-1)+x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x-1)'\sqrt{x} + (x-1)(\sqrt{x})' \\
&= 1\cdot\sqrt{x} + (x-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} + (x-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

(7) $u = 1+x^2$ とすると $y = \frac{1}{u^2}$ となりますから

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{2}{u^3}\cdot 2x = -\frac{4x}{(1+x^2)^3}
$$