2019年5月15日小テスト解答

次の関数 $f(x)$ に対して極限

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

を求めましょう．

(1) $f(x)=\sqrt{x-1}$ (ただし $\alpha>1$)

(2) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ (ただし $\alpha\neq 1$)

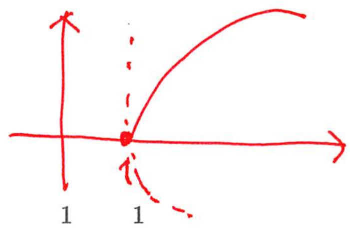
(3) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ (ただし $\alpha\neq 1$)

(4) $f(x)=\sqrt{2x+1}$ (ただし $\alpha>-\frac{1}{2}$)

(5) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ (ただし $\alpha\neq 0$)

解答 (1) $x\neq\alpha$ とします。

$\boxed{(x-1)-(\alpha-1)}$



$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}&=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{\alpha-1}}{x-\alpha}\\&=\frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{\alpha-1})(x-\alpha)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{\alpha-1}}\to\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}+\sqrt{\alpha-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\end{aligned}$$

ここで

$$\boxed{x\to\alpha\text{のとき}\sqrt{x-1}\to\sqrt{\alpha-1}}$$

$\boxed{(\sqrt{x-1})'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$

が成立することを用いています．これは

$$\sqrt{x}\to\sqrt{a}\quad(x\to a)$$

が成立することから以下のように示すことができます．これは数列 $\{x_n\}$ が

$$x_n>0,\ x_n\neq a,\ x_n\to a\ (n\to+\infty)\qquad(\#)$$

ならば

$\sqrt{x_n}$ が定義できるため

$$\sqrt{x_n}\to\sqrt{a}\quad(n\to+\infty)$$

であることを意味します．いま数列 t_n が

$\sqrt{t_n-1}$ を考えるため。

$$t_n>1,\ t_n\neq\alpha, t_n\to\alpha\ (n\to+\infty)$$

とします．このとき $x_n:=t_n-1$ は (#) を $a=\alpha-1>0$ に対して満たしますから

$$\sqrt{t_n-1}=\sqrt{x_n}\to\sqrt{a}=\sqrt{\alpha-1}\quad(n\to+\infty)$$

$x_n>0$

$\underset{\underset{t_n-1}{\shortparallel}}{x_n}\to\underset{\underset{a\text{と思う。}}{\shortparallel}}{\underline{\alpha-1}}$

が成立します．

注意

$$f'(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}$$

が分かります。

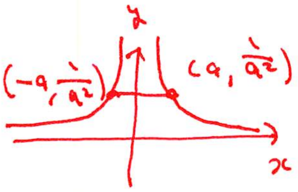
(2) $x \neq \alpha$ とします。

$\alpha - x$

$$\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\alpha-1}}{x-\alpha} = \frac{(\alpha-1)-(x-1)}{(x-1)(\alpha-1)(x-\alpha)}$$
$$= -\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x-1}$$
$$\to -\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{\alpha-1} = -\frac{1}{(\alpha-1)^2} \quad (x \to \alpha)$$

$x \to \alpha$ のとき

$x-1 \to \alpha-1$



注意

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

を得ます.

(3) $x \neq \alpha$ とします。

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$\frac{\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(\alpha-1)^2}}{x-\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2(\alpha-1)^2(x-\alpha)}$$
$$= \frac{\{(\alpha-1)+(x-1)\}\{(\alpha-1)-(x-1)\}}{(x-1)^2(\alpha-1)^2(x-\alpha)}$$
$$= \frac{(\alpha+x-2)(\alpha-x)}{(x-1)^2(\alpha-1)^2(x-\alpha)}$$
$$= -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\alpha+x-2}{(x-1)^2}$$
$$\to -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\cdot\frac{(\alpha+\alpha-2)}{(\alpha-1)^2} = -\frac{2}{(\alpha-1)^3}$$

$= 2(\alpha-1)$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{(\alpha-1)^3}$$

$$\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)' = -\frac{2}{(x-1)^3}$$

を得ます.

(4) $x \neq \alpha$ とします。

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2\alpha+1}}{x-\alpha}$$
$$= \frac{(2x+1)-(2\alpha+1)}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\alpha+1})(x-\alpha)}$$
$$= \frac{2\cancel{(x-\alpha)}}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\alpha+1})\cancel{(x-\alpha)}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\alpha+1}}$$

$y_n \to a$ のとき $\sqrt{y_n} \to \sqrt{a}$

$x_n \to \alpha \ (n \to +\infty)$ ならば $2x_n + 1 \to 2\alpha + 1 \ (n \to +\infty)$ となりますから,

$$\sqrt{2x_n+1} \to \sqrt{2\alpha+1} \ (n \to +\infty)$$

であることが分かります. これは

$$\sqrt{2x+1} \to \sqrt{2\alpha+1} \quad (x \to \alpha)$$

を意味します．これから

$$\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\alpha+1}} \to \frac{2}{\sqrt{2\alpha+1}+\sqrt{2\alpha+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}} \quad (x \to \alpha)$$

から

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \to \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}} \quad (x \to \alpha)$$

$$(\sqrt{2x+1})' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

であることが分かります．

(5)

$x \neq \alpha$ とします。

$$(\sqrt{2x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2$$

$$(2x+1)'$$

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\alpha^2}}{x-\alpha} &= \frac{\alpha^2-x^2}{x^2\alpha^2 2(x-\alpha)} \\
&= \frac{(\alpha-x)(\alpha+x)}{x^2\alpha^2(x-\alpha)} \\
&= -\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha+x}{x^2} \\
&\to -\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha+\alpha}{\alpha^2} = -\frac{2}{\alpha^3}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{\alpha^3}$$

を得ます．

微分積分演習（2019年度）

第7講義05/29

2019/05/29 第7講 演習問題

I

以下の数列$\{x_n\}$に対して

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

が成立することを示しましょう． **(1)** $x_n = \frac{8n^2-3}{2n+5}$ **(2)** $x_n = \frac{n^3-n}{n^2+1}$ **(3)** $x_n = \frac{4^n-2^n}{3^n+2^n}$

II

以下の関数$f(x)$に対して極限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めましょう．

(1) $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$ **(2)** $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ **(3)** $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2+4}$ **(4)** $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1}$ **(5)** $f(x) = \frac{x+3}{x^2+5x+6}$

III

数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$が

$$x_n \to +\infty, \quad y_n \to \alpha \in \mathbf{R} \quad (n \to +\infty)$$

を満たします．このとき

$$x_n + y_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

が成立することを示しましょう．

$f, g : (A, B) \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) \to \alpha,\ g(x) \to \alpha \quad (x \to c)$

のとき

(i) $\quad f(x) \pm g(x) \longrightarrow \alpha \pm \beta$

(ii) $\quad f(x)\, g(x) \longrightarrow \alpha\beta$

(iii) $\quad g(x) \neq 0 \quad (x \in (A, B) \setminus \{c\}),\ \beta \neq 0$

ならば

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}$$

$f(x) \to A \quad (x \to \alpha)$

$u(t) \longrightarrow \alpha \quad (t \to a)$

$\Rightarrow \quad f(u(t)) \longrightarrow A \quad (t \to a)$

$f(x) = \sqrt{x}, \quad u(t) = t - 1$

① $x \to \alpha$ のとき $\sqrt{x} \to \sqrt{\alpha}$.

$t \to a$ のとき $u(t) = t - 1 \longrightarrow a - 1 = \alpha$ $\Big\} \to$ $t \to a$ のとき $\sqrt{t-1} \to a - 1$.

② $x \to \alpha$ のとき

$t \to a$ のとき $u(t) = 2t + 1 \to 2a + 1 = \alpha$.

$\rightsquigarrow$ $t \to a$ のとき

$\sqrt{2t+1} \longrightarrow \sqrt{2a+1}$

定理 CT84p

$\dfrac{f(t)-f(c)}{t-c} \to f'(c)$ 極限が存在．
$(t \to c)$

定理

$f(t)$ が $t=c\in(A,B)$ で微分可能とします．このとき $f(t)$ は $t=c$ で連続です．すなわち

$$f(t)\to f(c)\quad (t\to c)$$

Proof

$$f(t)-f(c)=\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\cdot(t-c)$$

から　両辺にf(c)を加える

$$f(t)=\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\cdot(t-c)+f(c)\to f'(c)\cdot 0+f(c)=f(c)\quad (t\to c)$$

これは $f(t)$ が $t=c$ で連続であることを意味します．

微分の公式

公式

以下では f と g は $t=c$ で微分可能とします．このとき $t=c$ で以下が成立します．

(i) $(f\pm g)'=f'\pm g'$
(ii) $(fg)'=f'g+fg'$　（Leibniz' Rule）
(iii) $\left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'f-gf'}{f^2}$

(ii) を示します．((iii) は自分で示せるか？)

$$\frac{f(t)g(t)-f(c)g(c)}{t-c}=\frac{f(t)g(t)-f(c)g(t)+f(c)g(t)-f(c)g(c)}{t-c}$$

$$=\frac{f(t)g(t)-f(c)g(t)}{t-c}+\frac{f(c)g(t)-f(c)g(c)}{t-c}$$

$$=g(t)\frac{f(t)-f(c)}{t-c}+f(c)\frac{g(t)-g(c)}{t-c}$$

$$\to g(c)\cdot f'(c)+f(c)g'(c)$$

前の定理から
$g(t)\to g(c)$
$(t\to c)$

Examples(1)

Example 1 $(x^n)' = nx^{n-1}$
n に関する帰納法で示します． $n=1$ のとき $(x)'=1$ から OK. ここで $(x^n)' = nx^{n-1}$ を仮定すると

Leibnitz' Rule
$(fg)' = f'g + fg'$

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x^n \cdot x)' \\ &= (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\ &= \underbrace{nx^{n-1} \cdot x}_{=x^n} + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n = (n+1)x^{n+1-1}\end{aligned}$$

Example 2 $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

Examples(2)

$(fg)' = f'g + fg'$

Example 3

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}$

$(x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1}$

$$(x\sqrt{x})' = (x)'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$$

$$(x^2\sqrt{x})' = (x^2)'\sqrt{x} + x^2(\sqrt{x})' = 2x \cdot \sqrt{x} + \underbrace{\boxed{x^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}}_{= x\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \cdot x\sqrt{x}$$

Example 4

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)' &= \frac{(2x-1)'(x+1) - (2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1) - (2x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

$\boxed{\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}}$

分数関数のグラフ（ついで））(1)

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

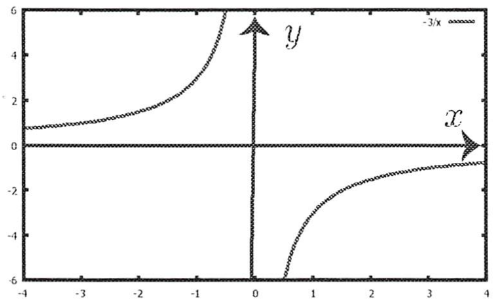
$ad - bc \neq 0$

1次分数関数.

$$y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$$

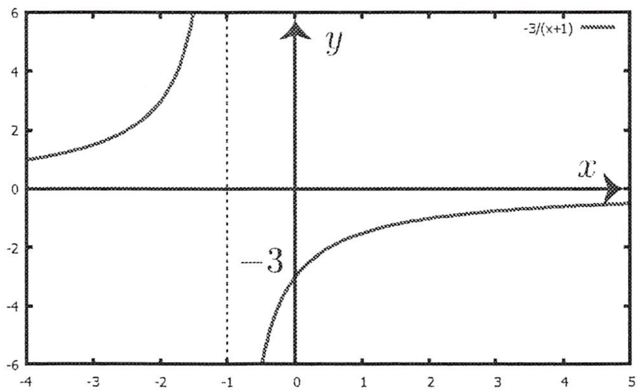
漸近線

asymptotic lines



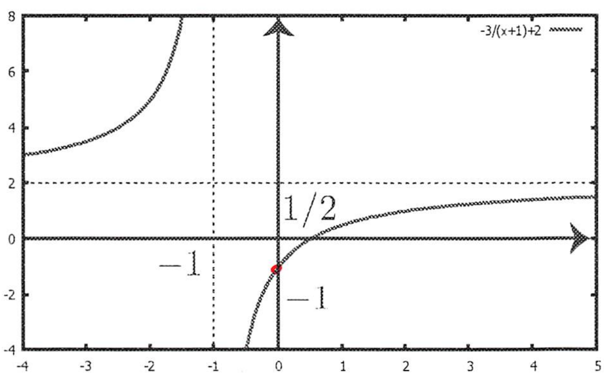
$y = -3/x$

GNUPLOT



$y = -\frac{3}{x+1}$

分数関数のグラフ（ついで））(2)



$y = 2 - \dfrac{3}{x+1}$

$y = 2$ $\quad$ $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

$x = -1$

$x \to +\infty$ のとき $\frac{1}{x} \to$ 0 なので

$$y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \to \frac{2-0}{1+0} = 2 \quad (x \to +\infty)$$

合成関数の微分

$f(x) = (x+a)^{10}$ を微分することを考えます．これは以下の 2 つの関数の合成です．

ちかん

$$g(u) = u^{10}, \quad u = u(x) = x + a \quad \text{のとき} \quad f(x) = g(u(x))$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{(x+a)^{10} - (c+a)^{10}}{x - c}$$

$x \to c$ のとき $u = u(x) \to c + a$ となります．ここで $A = c + a$ と定義すると

$= x + a$

$\to g'(A)$

$$\frac{(x+a)^{10} - (c+a)^{10}}{x - c} = \boxed{\frac{u^{10} - A^{10}}{u - A}} \cdot \boxed{\frac{(x+a) - (c+a)}{x - c}} = 1$$

$(u^{10})' = 10u^9$

$$\to 10A^9 \cdot 1 = 10(c+a)^9 \cdot 1$$

従って $f'(x) = ((x+a)^{10})' = 10(x+a)^9 \cdot 1$ ← $(x+a)'$

合成関数の微分 (2)

$f(x) = \sqrt{x-1}$ を微分します．この関数は以下の 2 つの関数の合成です．

$$g(u) = \sqrt{u}, \quad u = u(x) = x - 1 \quad \text{のとき} \quad f(x) = g(u(x))$$

ちかん

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{c-1}}{x - c}$$

$= x - 1$

$x \to c$ のとき, $u = u(x) \to c - 1$. ここで $A = c - 1$ と定義すると

$u \to A$

$$\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{c-1}}{x - c} = \boxed{\frac{\sqrt{u} - \sqrt{A}}{u - A}} \cdot \boxed{\frac{(x-1) - (c-1)}{x - c}} = 1$$

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}}$

$$\to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{c-1}}$$

従って $f'(x) = (\sqrt{x-1})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot 1$ ← $(x-1)'$

合成関数の微分 (3)

$f(x) = \sqrt{2x+1}$ の場合は？

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ を微分します．この関数は以下の 2 つの関数の合成です．

$$g(u) = \sqrt{u},\ u = u(x) = x^2 + 1 \quad \text{のとき} \quad f(x) = g(u(x))$$

代入

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{c^2+1}}{x - c}$$

$x \to c$ のとき，$u = u(x) \to c^2 + 1$ となします．ここで $A = c^2 + 1$ と定義すると

$= x^2 + 1$

$g'(A)$　　$u'(c)$

$$\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{c^2+1}}{x - c} = \boxed{\frac{\sqrt{u} - \sqrt{A}}{u - A}} \cdot \boxed{\frac{(x^2+1) - (c^2+1)}{x - c}}$$

$$\to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot 2c = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$$

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}$

従って $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$

合成関数の微分（Chain Rule）

Chain Rule

$(g(u(x)))' = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

$g'(u)$ に $u = u'(x)$ を代入

$y = g(u),\ u = u(x) \to y = g(u(x))$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$x \to c$ のとき，$u = u(x) \to u(c)$ となります．ここで $A = u(c)$ と定義すると

想定．
$u(x)$ が $x = c$ で微分できる．

$$\frac{g(u(x)) - g(u(c))}{x - c} = \frac{g(u) - g(A)}{u - A} \cdot \frac{u(x) - u(c)}{x - c}$$

$$\to g'(A) \cdot u'(c) = g'(u(c)) \cdot u'(c)$$

2 つの関数 $y = g(u)$, $u = u(x)$ を合成した関数 $y = g(u(x))$ の微分を

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

とも表現します．

Examples

Example 5 $y = (1+x^2)^3$ は

$$y = u^3 \quad と \quad u = 1 + x^2$$

の合成ですから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 2x = 6(1+x^2)^2 x$$

Example 6 $y = \frac{1}{(1+x^2)^3}$ は

$$y = \frac{1}{u^3} \quad と \quad u = 1 + x^2$$

の合成ですから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{3}{u^4} \cdot 2x = -\frac{6x}{(1+x^2)^4}$$

2019 年 5 月 22 日小テスト問題

I $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ のグラフを描きましょう.

II 以下の $f(x)$ に対して導関数 $f'(x)$ を求めましょう.

(1) $f(x) = x^3\sqrt{x}$

(2) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

(3) $f(x) = \frac{x-1}{3x+1}$

(4) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

(5) $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ $(x>1)$

(6) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$

(7) $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

$(fg)' = \cdots$

$u = x+1 \quad y = \frac{1}{u^2}$

$\left(\frac{g}{f}\right)' = \cdots$

$y = \sqrt{u}, \quad u = x^2+x+1$

まず $\left(\sqrt{x^2-1}\right)' = \cdots$ を求める

$y = \sqrt{u}$

$u = x^2-1$

$(fg)' = \cdots$

$y = \frac{1}{u^2}, \quad u = 1+x^2$