2019 年 5 月 15 日小テスト解答

次の関数 $f(x)$ に対して極限

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

を求めましょう．

(1) $f(x)=\sqrt{x-1}$ (ただし $\alpha>1$)

(2) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ (ただし $\alpha\neq 1$)

(3) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ (ただし $\alpha\neq 1$)

(4) $f(x)=\sqrt{2x+1}$ (ただし $\alpha>-\frac{1}{2}$)

(5) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ (ただし $\alpha\neq 0$)

解答 (1) $x\neq\alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}&=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{\alpha-1}}{x-\alpha}\\&=\frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{\alpha-1})(x-\alpha)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{\alpha-1}}\to\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}+\sqrt{\alpha-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\end{aligned}$$

ここで

$$x\to\alpha\text{のとき}\sqrt{x-1}\to\sqrt{\alpha-1}$$

が成立することを用いています．これは

$$\sqrt{x}\to\sqrt{a}\quad(x\to a)$$

が成立することから以下のように示すことができます．これは数列 $\{x_n\}$ が

$$x_n>0,\ x_n\neq a,\ x_n\to a\ (n\to+\infty) \tag{\#}$$

ならば

$$\sqrt{x_n}\to\sqrt{a}\quad(n\to+\infty)$$

であることを意味します．いま数列 t_n が

$$t_n>1,\ t_n\neq\alpha, t_n\to\alpha\ (n\to+\infty)$$

とします．このとき $x_n:=t_n-1$ は (#) を $a=\alpha-1>0$ に対して満たしますから

$$\sqrt{t_n-1}=\sqrt{x_n}\to\sqrt{a}=\sqrt{\alpha-1}\quad(n\to+\infty)$$

が成立します．

注意

$$f'(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}$$

が分かります。

(2) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\alpha-1}}{x-\alpha} &= \frac{(\alpha-1)-(x-1)}{(x-1)(\alpha-1)(x-\alpha)} \\ &= -\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x-1} \\ &\to -\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{\alpha-1} = -\frac{1}{(\alpha-1)^2} \quad (x \to \alpha)\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

を得ます.

(3) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(\alpha-1)^2}}{x-\alpha} &= \frac{(\alpha-1)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2(\alpha-1)^2(x-\alpha)} \\ &= \frac{\{(\alpha-1)+(x-1)\}\{(\alpha-1)-(x-1)\}}{(x-1)^2(\alpha-1)^2(x-\alpha)} \\ &= \frac{(\alpha+x-2)(\alpha-x)}{(x-1)^2(\alpha-1)^2(x-\alpha)} \\ &= -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\alpha+x-2}{(x-1)^2} \\ &\to -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\cdot\frac{(\alpha+\alpha-2)}{(\alpha-1)^2} = -\frac{2}{(\alpha-1)^3}\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{(\alpha-1)^3}$$

を得ます.

(4) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} &= \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2\alpha+1}}{x-\alpha} \\ &= \frac{(2x+1)-(2\alpha+1)}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\alpha+1})(x-\alpha)} \\ &= \frac{2(x-\alpha)}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\alpha+1})(x-\alpha)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\alpha+1}}\end{aligned}$$

$x_n \to \alpha$ $(n \to +\infty)$ ならば $2x_n+1 \to 2\alpha+1$ $(n \to +\infty)$ となりますから,

$$\sqrt{2x_n+1} \to \sqrt{2\alpha+1} \ (n \to +\infty)$$

であることが分かります．これは

$$\sqrt{2x+1} \to \sqrt{2\alpha+1} \quad (x \to \alpha)$$

を意味します．これから

$$\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\alpha+1}} \to \frac{2}{\sqrt{2\alpha+1}+\sqrt{2\alpha+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}} \quad (x \to \alpha)$$

から

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \to \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}} \quad (x \to \alpha)$$

であることが分かります．

5

$x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\alpha^2}}{x-\alpha} &= \frac{\alpha^2-x^2}{x^2\alpha^2 2(x-\alpha)} \\
&= \frac{(\alpha-x)(\alpha+x)}{x^2\alpha^2(x-\alpha)} \\
&= -\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha+x}{x^2} \\
&\to -\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha+\alpha}{\alpha^2} = -\frac{2}{\alpha^3}
\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{\alpha^3}$$

を得ます．