2019 年 5 月 15 日演習問題解答

I 実数 $r \in \mathbb{R}$ が $r \neq -1$ を満たすとき、極限

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - r^n}{1 + r^n}$$

を求めましょう。

解答 (i) $-1 < r < 1$ のとき $r^n \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成立しますから

$$\frac{1 + r^n}{1 + r^n} \to \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

(ii) $r = 1$ のとき

$$\frac{1 - r^n}{1 + r^n} = \frac{0}{2} = 0 \to 0$$

(iii) $r < -1$ または $r > 1$ のとき、$\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ に注意すると $\left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{r^n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ が分かりますから

$$\frac{1 - r^n}{1 + r^n} = \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + 1} \to \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

II 実数 $r \in \mathbb{R}$ が $r > 0$ を満たすとき、極限

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - nr^n}{1 + nr^n}$$

を求めましょう。

解答 (i) $0 < r < 1$ のとき $nr^n \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成立しますから

$$\frac{1 - nr^n}{1 + nr^n} \to \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

(ii) $r = 1$ のとき

$$\frac{1 - nr^n}{1 + nr^n} = \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n} + 1} \to \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

(iii) $r > 1$ のとき $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ から $\left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{r^n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成立しますから

$$\frac{1 - nr^n}{1 + nr^n} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n} + 1} \to \frac{0 \cdot 0 - 1}{0 \cdot 0 + 1} = -1$$

2　1 変数函数の微分

2.1　函数の極限など

2019 年 5 月 15 日演習問題解答

III 次の関数 $f(x)$ に対して極限

$$\lim_{x\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

を求めましょう.

(1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ (但し $\alpha \neq 0$)　(2) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ (但し $\alpha \neq 0$)

(3) $f(x)=\sqrt{x}$ (但し $\alpha > 0$)　(4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ (但し $\alpha > 0$)

(5) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ (但し $\alpha \neq -\frac{1}{2}$)　(6) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ (但し $\alpha \neq -2$)

(7) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ (但し $\alpha \neq -1$)　(8) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$　(9) $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$

(1) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} &= \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\alpha^2}}{x-\alpha} \\
&= \frac{\alpha^2-x^2}{x^2\alpha^2(x-\alpha)} \\
&= -\frac{x+\alpha}{x^2\alpha^2} \to -\frac{\alpha+\alpha}{\alpha^2\cdot\alpha^2} = -\frac{2}{\alpha^3} \quad (x\to\alpha)
\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{\alpha^3}$$

が分かります。

(2) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} &= \frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\alpha^3}}{x-\alpha} \\
&= \frac{\alpha^3-x^3}{x^3\alpha^3(x-\alpha)} \\
&= -\frac{x^2+\alpha x+\alpha^2}{x^3\alpha^3} \to -\frac{\alpha^2+\alpha\alpha+\alpha^2}{\alpha^3\cdot\alpha^3} = -\frac{3}{\alpha^4} \quad (x\to\alpha)
\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{3}{\alpha^4}$$

が分かります。

(3) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{x-\alpha} \\ &= \frac{x-\alpha}{(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})(x-\alpha)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}} \to \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

が分かります。

(4) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{x-\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{x}}}{x-\alpha} &= -\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{x}\cdot(x-\alpha)} \\ &= -\frac{x-\alpha}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})(x-\alpha)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} \to -\frac{1}{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha}\cdot(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha})} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}$$

が分かります。

(5) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2\alpha+1}}{x-\alpha} &= \frac{(2\alpha+1)-(2x+1)}{(2x+1)(2\alpha+1)(x-\alpha)} \\ &= -\frac{2}{2\alpha+1}\cdot\frac{1}{2x+1} \\ &\to -\frac{2}{2\alpha+1}\cdot\frac{1}{2\alpha+1} = -\frac{2}{(2\alpha+1)^2} \quad (x\to\alpha)\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{(2\alpha+1)^2}$$

を得ます。

(6) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\alpha+2}}{x-\alpha} &= \frac{(\alpha+2)-(x+2)}{(x+2)(\alpha+2)(x-\alpha)} \\ &= -\frac{1}{\alpha+2}\cdot\frac{1}{x+2} \\ &\to -\frac{1}{\alpha+2}\cdot\frac{1}{\alpha+2} = -\frac{1}{(\alpha+2)^2} \quad (x\to\alpha)\end{aligned}$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{(\alpha+2)^2}$$

を得ます。

(7) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(\alpha+1)^2}}{x-\alpha} &= -\frac{(x+1)^2 - (\alpha+1)^2}{(x+1)^2(\alpha+1)^2(x-\alpha)} \\
&= -\frac{(x-\alpha)(x+\alpha+2)}{(x+1)^2(\alpha+1)^2(x-\alpha)}
\end{aligned}$$

$$-\frac{(x+\alpha+2)}{(x+1)^2(\alpha+1)^2}$$

$$\to -\frac{(\alpha+\alpha+2)}{(\alpha+1)^2(\alpha+1)^2} = -\frac{2}{(\alpha+1)^3} \quad (x \to \alpha)$$

注意

$$f'(\alpha) = -\frac{2}{(\alpha+1)^3}$$

を得ます。

(8) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+\alpha^2}}{x-\alpha} &= \frac{(1+x^2) - (1+\alpha^2)}{(x-\alpha)(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+\alpha^2})} \\
&= \frac{x+\alpha}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+\alpha^2})}
\end{aligned}$$

となります。

$$\sqrt{y} \to \sqrt{\beta} \quad (y \to \beta)$$

が成立しますから、$x \to \alpha$ のとき $1+x^2 \to 1+\alpha^2$ から

$$\sqrt{1+x^2} \to \sqrt{1+\alpha^2}$$

が従います。よって

$$\frac{x+\alpha}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+\alpha^2})} \to \frac{\alpha+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2} + \sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

から

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

を得ます。

(9) $x \neq \alpha$ とします。

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\alpha^2+\alpha+1}}{x-\alpha} &= \frac{(\alpha^2+\alpha+1) - (x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(\alpha^2+\alpha+1)(x-\alpha)} \\
&= \frac{-(x+\alpha)-1}{x^2+x+1} \cdot \frac{1}{\alpha^2+\alpha+1} \\
&\to \frac{-(\alpha+\alpha)-1}{\alpha^2+\alpha+1} \cdot \frac{1}{\alpha^2+\alpha+1} = -\frac{2\alpha+1}{(\alpha^2+\alpha+1)^2}
\end{aligned}$$

から

$$f'(\alpha) = -\frac{2\alpha+1}{(\alpha^2+\alpha+1)^2}$$

を得ます。

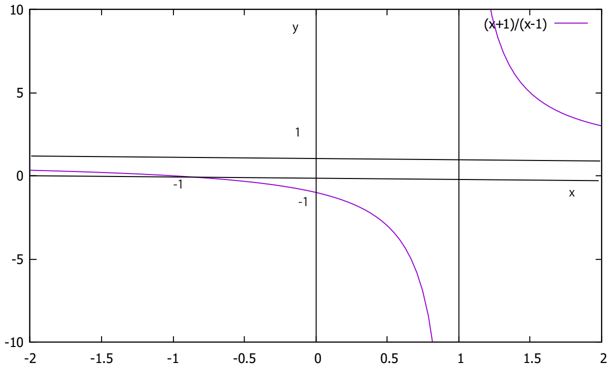
IV 次の 1 次分数関数のグラフを描きましょう。
(1) $y=\frac{x+1}{x-1}$ **(2)** $y=\frac{2x+1}{x+1}$ **(3)** $y=\frac{3x+1}{x+1}$ **(4)** $y=\frac{3x+4}{x+1}$

解答

(1)

$$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$$

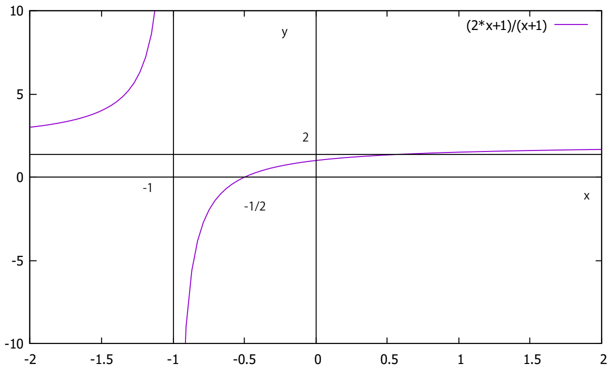
と変形すれば下図がグラフの概形であることが分かります。



(2)

$$y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}$$

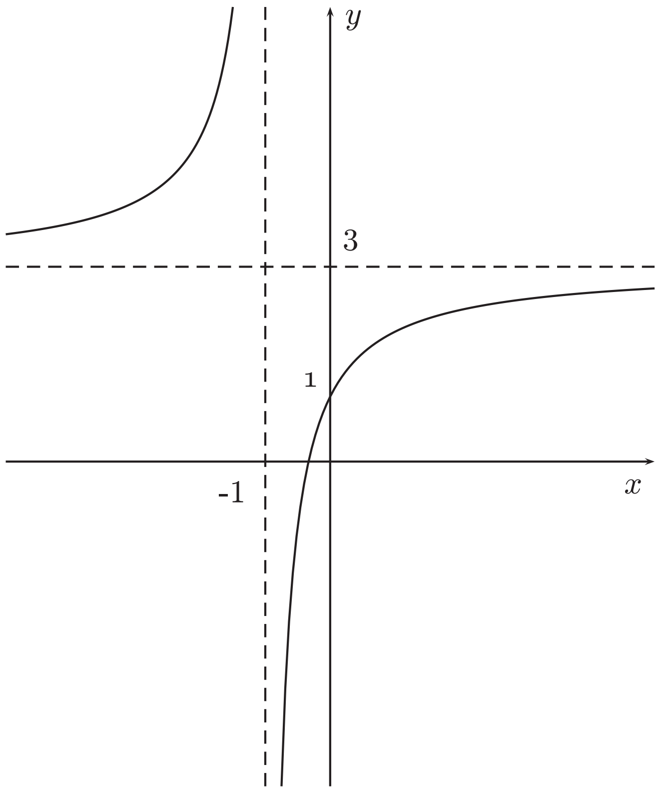
と変形すれば下図がグラフの概形であることが分かります。



(3)

$$y=\frac{3x+1}{x+1}=3-\frac{2}{x+1}$$

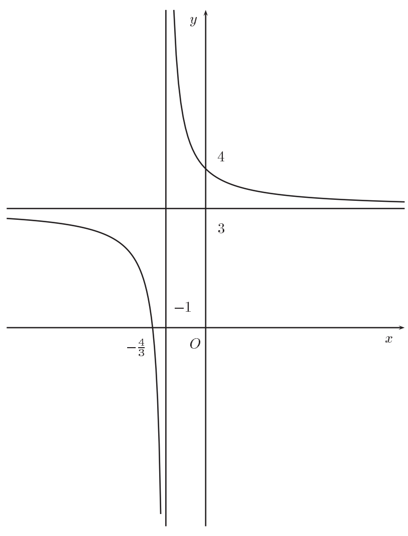
と変形すれば下図がグラフの概形であることが分かります。



(4)

$$y = \frac{3x+4}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1}$$

と変形すれば右図がグラフの概形であることが分かります。



補充問題 不等式

$$\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x}>1$$

を解きましょう。

解答

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x}-1&=-\frac{x^2-2x-4}{x(x-2)}\\&=-\frac{(x-(1-\sqrt{5}))(x-(1+\sqrt{5}))}{x(x-2)}\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}&\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x}-1>0\Leftrightarrow\frac{(x-(1-\sqrt{5}))(x-(1+\sqrt{5}))}{x(x-2)}<0\\\Leftrightarrow&\Big((x-(1-\sqrt{5}))(x-(1+\sqrt{5}))>0\text{ AND }x(x-2)<0\Big)\\&\text{OR}\Big((x-(1-\sqrt{5}))(x-(1+\sqrt{5}))<0\text{ AND }x(x-2)>0\Big)\\\Leftrightarrow&\text{FALSE OR}\\&\Big(1-\sqrt{5}<x<0\quad\text{OR}\quad 2<x<1+\sqrt{5}\Big)\\\Leftrightarrow&1-\sqrt{5}<x<0\quad\text{OR}\quad 2<x<1+\sqrt{5}\end{aligned}$$