

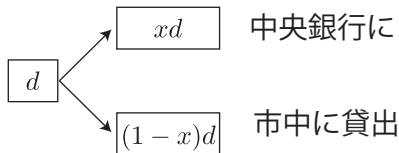
信用創造・関数の極限

Nobuyuki TOSE

CalcNT Lec05, May 15, 2019

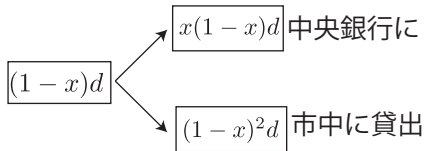
信用創造 (Credit Creation)

市中銀行 (Commercial Banks) に預金 d されたとする。預金準備率が x とすると：



信用創造 (2)

市中に貸し出した $(1 - x)d$ が預金として還流してくる.



信用創造 (3)

これを繰り返すと市中に貸し出した金額の合計が

$$\begin{aligned} & (1-x)d + (1-x)^2d + (1-x)^3d + \dots \\ &= (1-x)d(1 + (1-x) + (1-x)^2 + \dots) \\ &= (1-x)d \cdot \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{(1-x)d}{x} \end{aligned}$$

これを預金 d による信用創造 (Creation of Money) と呼びます。

$|r| < 1$ のとき

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$$

区間 (interval)

$a < b$ とする.

开区間 (open intervals)

$$(a, b) := \{x \in \mathbf{R}; a < x < b\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}; a < x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R}; x < b\}$$

闭区間 (closed intervals)

$$[a, b] := \{x \in \mathbf{R}; a \leq x \leq b\}$$

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R}; a \leq x\}$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R}; x \leq b\}$$

注意 $[a, b) := \{x \in \mathbf{R}; a \leq x < b\}$

X と Y を集合とします. X から Y への写像

$$f: X \rightarrow Y$$

とは任意の $x \in X$ に対して Y の要素 $f(x) \in Y$ をただ1個指定することです. この状況で X を f の定義域, Y を f の値域 (終域) と呼びます.

集合 X とその部分集合 A, B があるとします. このとき差集合

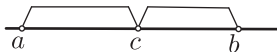
$$A \setminus B := \{x \in A; x \notin B\}$$

関数の極限

$a < c < b$ とします. $(a, b) \setminus \{c\} = (a, c) \cup (c, b)$ に注意します. 関数

$$f : (a, b) \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$$

に対して



$$f(t) \rightarrow A \quad (t \rightarrow c)$$

\Leftrightarrow

数列 $\{t_n\}$ が条件

$$a < t_n < b, t_n \neq c, t_n \rightarrow c \quad (n \rightarrow +\infty)$$

を満たすならば

$$f(t_n) \rightarrow A \quad (n \rightarrow +\infty)$$

注意 条件 $a < t_n < b, t_n \neq c$ は $f(t_n)$ が定義されるためです.

例

関数 $f(x) := \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) に対して $a \neq 0$, $x \neq 0$, a とするとき

$$A(a, f(a)), \quad P(x, f(x))$$

が定める直線 AP の傾きを考えます :

$$F(x) := \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} \quad (x \neq a, 0)$$

このとき

$$F(x) \rightarrow -\frac{1}{a^2} \quad (x \rightarrow a)$$

例 (2)

$$x_n \neq 0, x_n \neq a, x_n \rightarrow a (\neq 0) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

のとき

$$\frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

から

$$\begin{aligned} F(x_n) &= \frac{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}}{x_n - a} = \frac{\frac{a-x_n}{x_n a}}{x_n - a} \\ &= -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x_n} \rightarrow -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

定理 CT46P

定理

$$f : (a, b) \setminus \{c\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad g : (a, b) \setminus \{c\} \rightarrow \mathbf{R}$$

に対して $x \rightarrow c$ のとき

$$f(x) \rightarrow A, \quad g(x) \rightarrow B$$

とします。このとき

$$f(x) \pm g(x) \rightarrow A \pm B \quad (\text{I})$$

$$f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B \quad (\text{II})$$

$g(x) \neq 0$ ($x \in (a, b), x \neq c$), $B \neq 0$ ならば

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B} \quad (\text{III})$$

定理の証明

(II) を証明しよう. $\{x_n\}$ が

$$a < x_n < b, \quad x_n \neq c, \quad x_n \rightarrow c$$

を満たすとします. このとき

$$f(x_n) \rightarrow A, \quad g(x_n) \rightarrow B$$

従って

$$f(x_n) \cdot g(x_n) \rightarrow A \cdot B$$

$$a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta \quad (n \rightarrow +\infty) \quad \text{ならば} \quad a_n b_n \rightarrow \alpha \beta$$

はさみうちの定理

定理 CT42P

$$f : (a, b) \setminus \{c\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad g : (a, b) \setminus \{c\} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$h : (a, b) \setminus \{c\} \rightarrow \mathbf{R}$$

が不等式

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad (x \in (a, b) \setminus \{c\})$$

を満たすとします。このとき

$$f(x) \rightarrow A, \quad h(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow c)$$

\Rightarrow

$$g(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow c)$$

はさみうちの定理—証明

数列 $\{x_n\}$ が

$$a < x_n < b, x_n \neq c, x_n \rightarrow c \quad (n \rightarrow +\infty)$$

を満たすとします。このとき

$$f(x_n) \rightarrow A, h(x_n) \rightarrow A \quad (n \rightarrow +\infty)$$

が成立します。

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$$

からはさみうちの定理が使えて

$$g(x_n) \rightarrow A$$

が従います。

はさみうちの定理—応用

$a > 0$ ならば

$$\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{a} \quad (x \rightarrow a)$$

$x, a > 0, x \neq a$ とします。

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

の両辺の絶対値をとると

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}$$

から

$$-\frac{|x - a|}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} < \sqrt{x} < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}$$

注意

$$x \rightarrow a \Rightarrow |x - a| \rightarrow 0 \quad (1)$$

これは次からから従います.

$$h_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow +\infty) \Rightarrow |h_n| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow +\infty)$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号 N が存在して

$$-\varepsilon < h_n < \varepsilon \quad (n \geq N)$$

から

$$-\varepsilon < 0 \leq |h_n| < \varepsilon \quad (n \geq N)$$

幾何級数 (1) CT 98p 例 3.14

$0 < p < 1$, $q = 1 - p$ とします. \mathbf{Z}_+ に値をとる確率変数 X が幾何分布に従うとは

$$P(X = k) = p^k q \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

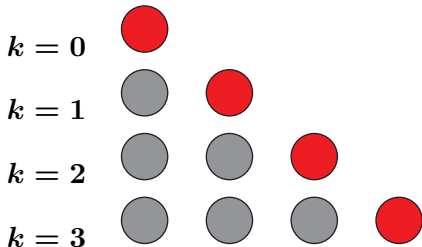
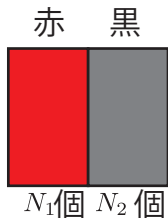
を満たすときです. 実際

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} qp^k = q \sum_{k=0}^{+\infty} p^k \\ &= q \cdot \frac{1}{1-p} = \frac{q}{q} = 1 \end{aligned}$$

幾何級数 (2)

X の意味は？ 袋の中に赤玉 N_1 個，黒玉 N_2 個が入っているとします。

袋から 1 個の玉を取り出しては戻すという試行を繰り返して，赤玉が出たときに止めます．このときまでに出了た黒玉の個数が $X = k$ とします．



幾何級数 (3)

ここで

$$p = \frac{N_2}{N_1 + N_2}, \quad q = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

とします. $X = k$ となる場合



の確率は

$$P(X = k) = p^k q$$

となります.

幾何級数 (4)

X の期待値は？

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot qp^k \\
 &= q \sum_{k=0}^{+\infty} kp^k = q \sum_{k=1}^{+\infty} kp^k = q \cdot \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p}{q}
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{array}{r}
 T_n := p + 2p^2 + \cdots + np^n \\
 -) \quad pT_n = \quad \quad p^2 + \cdots + (n-1)p^n + np^{n+1} \\
 \hline
 (1-p)T_n = p + p^2 + \cdots + p^n - np^{n+1} \\
 = \frac{p-p^{n+1}}{1-p} - np^{n+1}
 \end{array}$$

から

$$T_n = \frac{p-p^{n+1}}{(1-p)^2} - \frac{np^{n+1}}{1-p} \rightarrow \frac{p}{(1-p)^2} \quad (n \rightarrow +\infty)$$