$$\frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$$

2019年5月8日小テスト解答

I 次の数列の極限を求めましょう．

(1) $\dfrac{3^n+2}{4^n+5}$

解答 (1)

$$\frac{3^n+2}{4^n+5} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n} \to \frac{0+2\cdot 0}{1+5\cdot 0} = 0 \quad (n\to+\infty)$$

II $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}$ の値を求めましょう．

解答 $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}$ とします． 第n部分和．

$$\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & S_n & := & 1 & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4^2} & + & \cdots & + & \frac{1}{4^n} & & \\
-) & \frac{1}{4}S_n & := & & & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4^2} & + & \cdots & + & \frac{1}{4^n} & + & \frac{1}{4^{n+1}} \\
\hline
 & \frac{3}{4}S_n & = & 1 & & & & & & & & & - & \frac{1}{4^{n+1}}
\end{array}$$

から

$$S_n = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^n}\right) \to \overset{\frac{4}{3}}{\cancel{\frac{3}{4}}}\left(1-\frac{1}{4}\cdot 0\right) = \underset{\frac{4}{3}.}{\cancel{\frac{3}{4}}} \quad (n\to+\infty)$$

III $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$ の値を求めましょう． OK．

解答 $T_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{3^{k-1}}$ とします． k

=

$$\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & T_n & := & \boxed{1\cdot 1} & + & 2\cdot\frac{1}{3} & + & 3\cdot\frac{1}{3^2} & + & \cdot & + & \boxed{n\cdot\frac{1}{3^{n-1}}} & & \\
-) & \frac{1}{3}T_n & = & & & \boxed{1\cdot\frac{1}{3}} & + & 2\cdot\frac{1}{3^2} & + & \cdot & + & (n-1)\cdot\frac{1}{3^{n-1}} & + & \boxed{n\cdot\frac{1}{3^n}} \\
\hline
 & \frac{2}{3}T_n & := & 1\cdot 1 & + & 1\cdot\frac{1}{3} & + & 1\cdot\frac{1}{3^2} & + & \cdot & + & 1\cdot\frac{1}{3^{n-1}} & - & n\cdot\frac{1}{3^n}
\end{array}$$

から

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{3}{2}\left(\boxed{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}} - n\cdot\frac{1}{3^n}\right) \\
&= \frac{3}{2}\cdot\boxed{\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}} - \frac{3}{2}\cdot n\cdot\frac{1}{3^n} \\
&\to \frac{3}{2}\cdot\frac{1-0}{\underset{\frac{2}{3}}{\boxed{1-\frac{1}{3}}}} - \frac{3}{2}\cdot 0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4} \quad (n\to+\infty)
\end{aligned}$$

写像・差集合

X と Y を集合とします．X から Y への写像

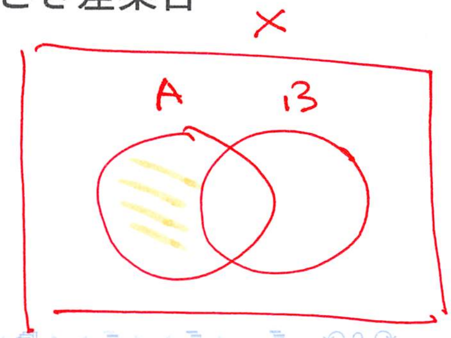
$$f:\ X \to Y$$

とは任意の $x \in X$ に対して Y の要素 $f(x) \in Y$ をただ 1 個指定することです．この状況で X を f の定義域，Y を f の値域（終域）と呼びます．

集合 X とその部分集合 A, B があるとします．このとき差集合

$$A \setminus B := \{x \in A;\ x \notin B\}$$

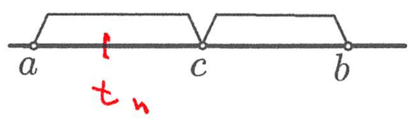
$\notin$



関数の極限

$a < c < b$ とします．$(a, b) \setminus \{c\} = (a, c) \cup (c, b)$ に注意します．関数

$$f:\ (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$$



に対して

$$f(t) \to A \quad (t \to c)$$

$\Leftrightarrow$

数列 $\{t_n\}$ が条件

$$a < t_n < b,\ t_n \neq c,\ t_n \to c \quad (n \to +\infty)$$

を満たすならば

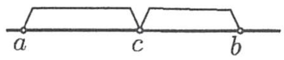
$$f(t_n) \to A \quad (n \to +\infty)$$

注意 条件 $a < t_n < b,\ t_n \neq c$ は $f(t_n)$ が定義されるためです．

関数の極限

$a < c < b$ とします．$(a, b) \setminus \{c\} = (a, c) \cup (c, b)$ に注意します．関数

$$f: (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$$



に対して

$$f(t) \to A \quad (t \to c)$$

$\Leftrightarrow$

数列 $\{t_n\}$ が条件

$$a < t_n < b,\ t_n \neq c,\ t_n \to c \quad (n \to +\infty)$$

を満たすならば

$$f(t_n) \to A \quad (n \to +\infty)$$

注意 条件 $a < t_n < b,\ t_n \neq c$ は $f(t_n)$ が定義されるためです．

例

$x \neq 0$ かつ $x \neq a$

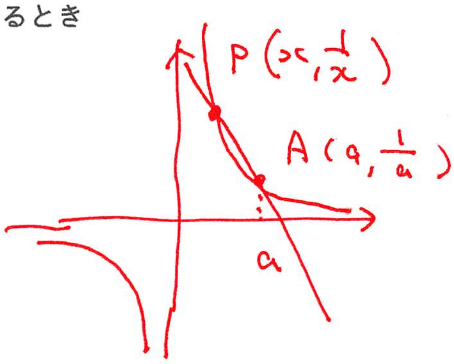
関数 $f(x) := \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ に対して $a \neq 0$, $x \neq 0, a$ とするとき

$$\mathrm{A}(a, f(a)), \quad \mathrm{P}(x, f(x))$$

$(a, \frac{1}{a})$

が定める直線 AP の傾きを考えます：

$$F(x) := \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} \quad (x \neq a, 0)$$



このとき

$$F(x) \to -\frac{1}{a^2} \quad (x \to a)$$

例 (2)

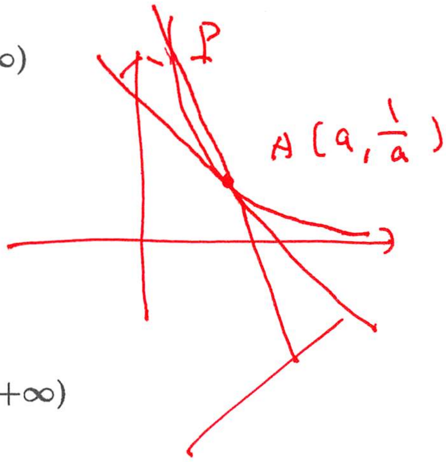
$$x_n \neq 0,\ x_n \neq a,\ x_n \to a(\neq 0) \quad (n \to +\infty)$$

のとき

$$\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$$

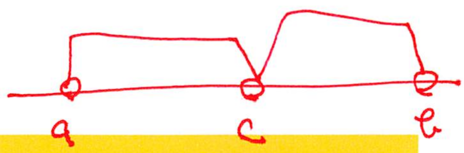
から

$$F(x_n) = \frac{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}}{x_n - a} = \frac{\frac{a - x_n}{x_n a}}{x_n - a}$$
$$= -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x_n} \to -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \quad (n \to +\infty)$$



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

接線の傾きが $-\frac{1}{a^2}$



定理 CT46P

定理

$$f:\ (a,b)\setminus\{c\} \to \mathbf{R},\quad g:\ (a,b)\setminus\{c\} \to \mathbf{R}$$

に対して $x \to c$ のとき

$$f(x) \to A,\quad g(x) \to B$$

とします．このとき

$$f(x) \pm g(x) \to A \pm B \tag{I}$$

$$f(x)\cdot g(x) \to A\cdot B \tag{II}$$

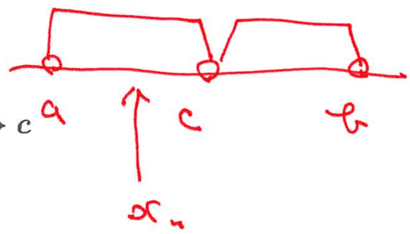
$g(x) \neq 0\ (x \in (a,b), x \neq c)$, $B \neq 0$ ならば

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B} \tag{III}$$

各自考える.

定理の証明

(II) を証明しよう．$\{x_n\}$ が



$$a < x_n < b, \quad x_n \neq c,\ x_n \to c$$

を満たすとします．このとき

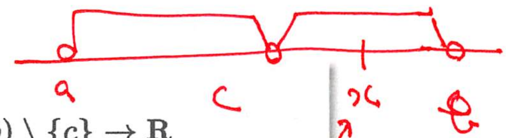
$$f(x_n) \to A, \quad g(x_n) \to B$$

従って

$$f(x_n) \cdot g(x_n) \to A \cdot B$$

$a_n \to \alpha, b_n \to \beta\ (n \to +\infty)$ ならば $a_n b_n \to \alpha\beta$

はさみうちの定理



定理 CT42P

$$f:\ (a,b)\setminus\{c\} \to \mathbf{R}, \quad g:\ (a,b)\setminus\{c\} \to \mathbf{R}$$
$$h:\ (a,b)\setminus\{c\} \to \mathbf{R}$$

が不等式

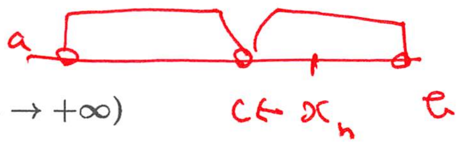
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad (x \in (a,b)\setminus\{c\})$$

を満たすとします．このとき

$$f(x) \to A,\ h(x) \to A \quad (x \to c)$$
$$\Rightarrow$$
$$g(x) \to A \quad (x \to c)$$

はさみうちの定理—証明

数列 $\{x_n\}$ が



$$a < x_n < b,\ x_n \neq c,\ x_n \to c\ (n \to +\infty)$$

を満たすとします．このとき

$$f(x_n) \to A,\ h(x_n) \to A \quad (n \to +\infty)$$

が成立します．

$$\underset{\uparrow A}{f(x_n)} \leq g(x_n) \leq \underset{\uparrow A}{h(x_n)}$$

からはさみうちの定理が使えて $\longrightarrow A$ はさみうち．

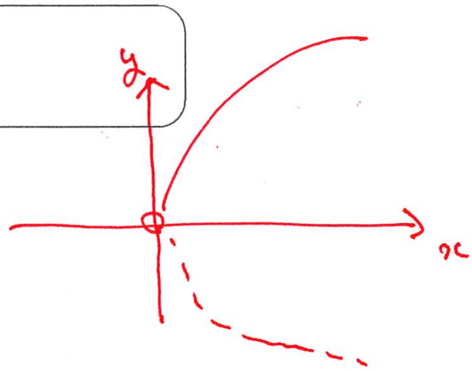
$$g(x_n) \to A$$

が従います．

はさみうちの定理—応用

$a > 0$ ならば

$$\sqrt{x} \to \sqrt{a} \quad (x \to a)$$



$x, a > 0$, $x \neq a$ とします．

想定

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

の両辺の絶対値をとると

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\underset{\geq 0}{\sqrt{x}}+\sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

$\sqrt{a}$　　$\sqrt{a}$

$y = \sqrt{x} \geq 0$

$\downarrow$

$y^2 = x$.

から

$$-\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} < \sqrt{x} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}$$

$x \to a$

$\downarrow$ 0　　$\downarrow$ $\sqrt{a}$　　$\downarrow$ 0

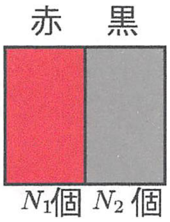
はさみうち．

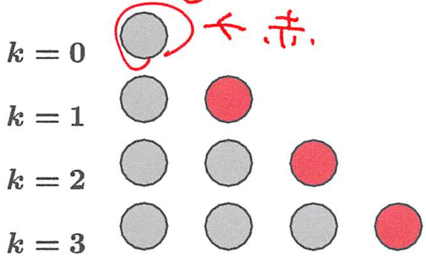
幾何級数 (2)

黒　　赤.

X の意味は？袋の中に赤玉 N_1 個，黒玉 N_2 個が入っているとします．

袋から 1 個の玉を取り出しては戻すという試行を繰り返して，黒玉が出たときに止めます．このときまでに出た赤玉の個数が $X = k$ とします．



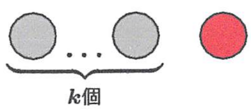


幾何級数 (3)

ここで

$$p = \frac{N_1 - 2}{N_1 + N_2}, \quad q = \frac{N_2 - 1}{N_1 + N_2}$$

とします．$X = k$ となる場合



の確率は

$$P(X = k) = p^k q$$

となります．

$x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ とする.

注意

$h_n := x_n - a \to 0$

$$x \to a \quad \Rightarrow |x - a| \to 0 \tag{1}$$

$\rightsquigarrow |h_n| = |x_n - a| \to 0$

これは次からから従います.

$$h_n \to 0 \ (n \to +\infty) \quad \Rightarrow \quad |h_n| \to 0 \ (n \to +\infty)$$

$h_N, h_{N+1}, \cdots$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号 N が存在して

$$-\varepsilon < h_n < \varepsilon \quad (n \geq N)$$

0

$-\varepsilon$ ε

から

$$-\varepsilon < 0 \leq |h_n| < \varepsilon \quad (n \geq N)$$

$|h_N|, |h_{N+1}|, \cdots$

$\to |h_n| \to 0$

幾何級数 (1) CT 98p 例 3.14

$= \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ 非負整数.

non-negative integer

$0 < p < 1$, $q = 1 - p$ とします. $\mathbb{Z}_+$ に値をとる確率変数 X が幾何分布に従うとは

$$P(X = k) = p^k q \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすときです. 実際

$P(X=k)$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} = \sum_{k=0}^{+\infty} qp^k = q \sum_{k=0}^{+\infty} p^k$$

$= 1 + p + p^2 + \cdots$

$$= q \cdot \frac{1}{1-p} = \frac{q}{q} = 1$$

X の期待値は？

$$E[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot qp^k = q \cdot \frac{p}{q^2}$$

$$= q\sum_{k=0}^{+\infty} kp^k = q\sum_{k=1}^{+\infty} kp^k = q \cdot \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p}{q}$$

ここで

$$\begin{array}{rrcccccccc}
 & T_n := & p & + & 2p^2 & +\cdots+ & np^n & & \\
-) & pT_n = & & & p^2 & +\cdots+ & (n-1)p^n & + & np^{n+1} \\
\hline
 & (1-p)T_n = & p & + & p^2 & +\cdots+ & p^n & - & np^{n+1} \\
 & = & \multicolumn{7}{l}{\frac{p-p^{n+1}}{1-p} - np^{n+1}}
\end{array}$$

$0 < p < 1$

から

$= p \cdot p^n \to p \cdot 0 = 0 \quad (n \to +\infty)$

$$T_n = \frac{p - p^{n+1}}{(1-p)^2} - \frac{np^{n+1}}{1-p} \to \frac{p}{(1-p)^2} \quad (n \to +\infty)$$

$p \cdot np^n \to p \cdot 0 = 0$

微分可能な関数

Nobuyuki TOSE

CalcNT, May 22, 2019

微分可能な関数—定義

定義

$f:\ (A,B) \to \mathbf{R}$ に対して，$f(t)$ が $t = c \in (A,B)$ で微分可能とは極限

$$\lim_{t \to c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c}$$

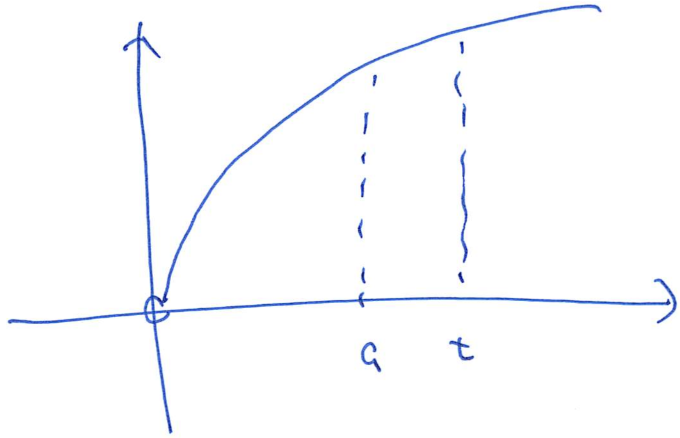
t と c に注意…

が存在するときです．この極限を $f'(c)$ と記して，f の $t = c$ における**微分係数**と呼びます．
さらに $f(t)$ が各点 $t = c \in (A,B)$ で微分可能であるとき f は (A,B) 上微分可能であると呼びます．

$f(t)=\sqrt{t} \quad (t>0)$

$a>0, \quad t \neq a$

$$\frac{\sqrt{t}-\sqrt{a}}{t-a}$$



$$= \frac{t-a}{(\sqrt{t}+\sqrt{a})(t-a)} = \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{a}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$\boxed{t \to a \text{ のとき } \sqrt{t} \to \sqrt{a}}$

$$(\sqrt{t})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \longleftrightarrow (t^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1}$$