2019 年 5 月 8 日小テスト解答

I 次の数列の極限を求めましょう.

(1) $\dfrac{3^n+2}{4^n+5}$

解答 **(1)**

$$\frac{3^n+2}{4^n+5}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}\to\frac{0+2\cdot 0}{1+5\cdot 0}=0\quad(n\to+\infty)$$

II $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}$ の値を求めましょう.

解答 $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}$ とします.

$$\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & S_n & := & 1 & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4^2} & + & \cdots & + & \frac{1}{4^n} & & \\
-) & \frac{1}{4}S_n & := & & & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4^2} & + & \cdots & + & \frac{1}{4^n} & + & \frac{1}{4^{n+1}} \\
\hline
 & \frac{3}{4}S_n & = & 1 & & & & & & & & & - & \frac{1}{4^{n+1}}
\end{array}$$

から

$$S_n=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^n}\right)\to\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4}\cdot 0\right)=\frac{4}{3}\quad(n\to+\infty)$$

III $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$ の値を求めましょう.

解答 $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^{k-1}}$ とします.

$$\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & T_n & := & 1\cdot 1 & + & 2\cdot\frac{1}{3} & + & 3\cdot\frac{1}{3^2} & + & \cdots & + & n\cdot\frac{1}{3^{n-1}} & & \\
-) & \frac{1}{3}T_n & = & & & 1\cdot\frac{1}{3} & + & 2\cdot\frac{1}{3^2} & + & \cdots & + & (n-1)\cdot\frac{1}{3^{n-1}} & + & n\cdot\frac{1}{3^n} \\
\hline
 & \frac{2}{3}T_n & := & 1\cdot 1 & + & 1\cdot\frac{1}{3} & + & 1\cdot\frac{1}{3^2} & + & \cdots & + & 1\cdot\frac{1}{3^{n-1}} & - & n\cdot\frac{1}{3^n}
\end{array}$$

から

$$\begin{aligned}
T_n&=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}-n\cdot\frac{1}{3^n}\right)\\
&=\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}\cdot n\cdot\frac{1}{3^n}\\
&\to\frac{3}{2}\cdot\frac{1-0}{1-\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}\cdot 0=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}\quad(n\to+\infty)
\end{aligned}$$