1.2　数列の極限

2019 年 5 月 08 日演習問題解答

I 実数 $r \in \mathbb{R}$ が $r \neq -1$ を満たすとき、極限

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{r^n + 1}$$

を求めましょう。

解答 (i) $-1 < r < 1$ のとき $r^n \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成立しますから

$$\frac{1}{r^n + 1} \to \frac{1}{0+1} = 1$$

(ii) $r = 1$ のとき

$$\frac{1}{r^n + 1} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

(iii) $r < -1$ または $r > 1$ のとき、$\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ に注意すると $\left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{r^n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ が分かりますから

$$\frac{1}{r^n + 1} = \frac{\frac{1}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} \to \frac{0}{1+0} = 0$$

II 実数 $r \in \mathbb{R}$ が $r > 0$ を満たすとき、極限

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{nr^n + 1}$$

を求めましょう。

解答　(i) $0 < r < 1$ のとき $nr^n \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成立しますから

$$\frac{1}{nr^n + 1} \to \frac{1}{0+1} = 1$$

(ii) $r = 1$ のとき

$$\frac{1}{nr^n + 1} = \frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \to \frac{0}{1+0} = 0$$

(iii) $r > 1$ のとき $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ から $\left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{r^n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成立しますから

$$\frac{1}{nr^n + 1} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n}} \to \frac{0 \cdot 0}{1 + 0 \cdot 0} = 0$$

III 次の数列の極限を求めましょう。
(1) $\frac{3n+7}{n^2+n+1}$ (2) $\frac{5n-2}{7n+3}$ (3) $\frac{n^2}{1+n^2}$ (4) $\frac{2^n}{3^n+4}$ (5) $\frac{4^n-5^n}{3^n+5^n}$ (6) $\frac{4^{n+1}+2^{n+1}}{4^n-3^n}$ (7) $\frac{3\cdot 2^n-5}{2^n+3}$

(1)

$$\frac{3n+7}{n^2+n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(3n+7)}{n^2+n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{3+7\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\to 0\cdot\frac{3+7\cdot 0}{1+0+0}=0$$

(2)

$$\frac{5n-2}{7n+3}=\frac{5-2\cdot\frac{1}{n}}{7+3\cdot\frac{1}{n}}\to\frac{5-2\cdot 0}{7+3\cdot 0}=\frac{5}{7}$$

(3)

$$\frac{n^2}{1+n^2}=\frac{1}{\frac{1}{n^2}+1}\to\frac{1}{0+1}=1\quad(n\to+\infty)$$

(4)

$$\frac{2^n}{3^n+4}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}\to\frac{0}{1+4\cdot 0}=0$$

(5)

$$\frac{4^n-5^n}{3^n+5^n}=\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}\to\frac{0-1}{0+1}=-1\quad(n\to+\infty)$$

(6)

$$\frac{4^{n+1}+2^{n+1}}{4^n-3^n}=\frac{4+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}\to\frac{4+2\cdot 0}{1-0}=4\quad(n\to+\infty)$$

(7)

$$\frac{3\cdot 2^n-5}{2^n+3}=\frac{3-5\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}\to\frac{3-5\cdot 0}{1+3\cdot 0}=3\quad(n\to+\infty)$$

IV $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ の値を求めましょう。

解答

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

とします。

$$\begin{array}{rclcccccccc}
S_n & = & 1+ & 2\cdot\frac{1}{4}+ & 3\cdot\frac{1}{4^2}+ & 4\cdot\frac{1}{4^3}+ & \cdots+ & n\cdot\frac{1}{4^{n-1}} & \\
-)\frac{1}{4}S_n & = & & 1\cdot\frac{1}{4}+ & 2\cdot\frac{1}{4^2}+ & 3\cdot\frac{1}{4^3}+ & \cdots+ & (n-1)\cdot\frac{1}{4^{n-1}} & +n\cdot\frac{1}{4^n} \\
\hline
\frac{3}{4}S_n & = & 1+ & \frac{1}{4}+ & \frac{1}{4^2}+ & \frac{1}{4^3}+ & \cdots+ & \frac{1}{4^{n-1}} & -n\cdot\frac{1}{4^n}
\end{array}$$

から

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{4}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{4}{3}\cdot\frac{n}{4^n} = \frac{16}{9}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) - \frac{4}{3}\cdot n\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &\to \frac{16}{9}(1-0) - \frac{4}{3}\cdot 0 = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{16}{9}$$

IV $|r|<1$ のとき $\lim_{n\to+\infty} n^2r^n = 0$ であることを示しましょう．

解答

(i) $0<r<1$ のとき $s=\frac{1}{r}$ とおくと $s>1$ となります．このとき $s=1+\theta$ とすると $\theta>0$ であることに注意しましょう．このとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n} &= s^n = (1+\theta)^n \\ &= 1 + {}_nC_1\theta + {}_nC_2\theta^2 + {}_nC_3\theta^3 + {}_nC_4\theta^4 + \cdots + \theta^n \end{aligned}$$

の最左辺において各項が正ですから

$$\frac{1}{r^n} > {}_nC_3\theta^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\theta^3$$

であることが従います．よって

$$0 < r^n < \frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{3!}{n(n-1)(n-2)} \quad \text{から} \quad 0 < n^2r^n < \frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{3!}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}\cdot\frac{1}{n}$$

であることが分かります．ここで

$$\frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{3!}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}\cdot\frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to+\infty)$$

ですから

$$n^2r^n \to 0 \quad (n\to+\infty)$$

であることが分かります．

(ii) $r=0$ のとき $n^2r^n = 0 \to 0 \quad (n\to+\infty)$

(iii) $-1<r<0$ のとき $\rho=-r$ とすると $0<\rho<1$ となります．このとき

$$-\rho^n \le r^n \le \rho^n \quad \text{から} \quad -n^2\rho^n \le n^2r^n \le n^2\rho^n$$

が成立します．ここで

$$-n^2\rho^n \to 0,\ n^2\rho^n \to 0\ (n\to+\infty)$$

が成立しますから，はさみうちの定理から

$$n^2r^n \to 0 \quad (n\to+\infty)$$

であることが導かれます．