# 数列の収束

Nobuyuki TOSE

CalcNT, May 08, 2019

# 命題関数

命題とは真偽がはっきりとしている文のことです．

例　$1 < 2$ は真で，$1 > 2$ は偽の命題です．

$X$ を集合とするとき，$x \in X$ を含み $x$ を指定することによって真偽が定める文を $X$ 上の命題関数と呼びます．

例 $X = \mathbf{R}$ 上の命題関数

$$P(x) : \ x > 1$$

# 命題関数 (2)

集合 $X$ 上の命題関数 $P(x)$ に対して命題

$$\forall x \in X(P(x)) \quad \text{任意の } x \in X \text{ に対して } P(x) \text{ が真}$$

$$\exists x \in X(P(x)) \quad \text{ある } x \in X \text{ に対して } P(x) \text{ が真}$$

が定まります.
例 $X = \mathbf{R}$ 上の命題関数 $P(x) : x > 1$ について
・ $P(0) : 0 > 1$ は偽であるから $\forall x \in X(P(x))$ は偽
・ $P(2) : 2 > 1$ は真であるから $\exists x \in X(P(x))$ は真

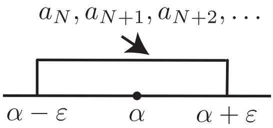
無限数列

$$\boldsymbol{a_0, a_1, a_2, \cdots}$$

があるとします．このとき $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}$ に対して

$$\boldsymbol{a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)} \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}\text{に対して}\exists \boldsymbol{N}\text{番号が存在して}$$

$$\boldsymbol{\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N)}$$



# 数列の収束 (2)–例

例 1 定数列 $a_n = c$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ とすると

$$a_n \to c \quad (n \to +\infty)$$

実際，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$c - \varepsilon < a_n = c < c + \varepsilon$$

例 2 $a_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ とすると

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = N - 1$ とすると

$$\frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = N$$

従って $n \geq N$ とすると

$$-\varepsilon + 0 < 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon + 0$$

注意 ここで Gauss 記号の性質

$$x - 1 < [x] \leq x \quad (x \in \mathbf{R})$$

を用いました．（$x \in \mathbf{R}$ に対して $[x]$ は $x$ の整数部分）

# 収束する数列の性質

**定理 1.1 CT20p**

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に収束するとします：

$$a_n \to \alpha, \quad b_n \to \beta \quad (n \to +\infty)$$

**(i)** $a_n \pm b_n \to \alpha \pm \beta \quad (n \to +\infty)$
**(ii)** $a_n \cdot b_n \to \alpha \cdot \beta \quad (n \to +\infty)$
**(iii)** すべての番号に対して $a_n \neq 0$, $\alpha \neq 0$ とすると

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\beta}{\alpha} \quad (n \to +\infty)$$

証明は CT にあります.

(1) $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 \quad (n \to +\infty)$
これを繰り返すと $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{n^k} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

(2) $a_n = \dfrac{1}{3+n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$

注意 $b_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$ ならば

$$a_n := b_{n+n_0} \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

この注意は収束の定義から示せます．この注意を

$$b_n := \frac{1}{n} \quad \text{に対して} \quad a_n := \frac{1}{n+3} = b_{n+3}$$

別の理解 $n \to +\infty$ のとき

$$\frac{1}{3+n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{3+n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{n} + 1} \to 0 \cdot \frac{1}{3 \cdot 0 + 1} = 0 \cdot 1 = 0$$

(3) $n \to +\infty$ のとき

$$\frac{4-n}{5+n} = \frac{4 \cdot \frac{1}{n} - 1}{5 \cdot \frac{1}{n} + 1} \to \frac{4 \cdot 0 - 1}{5 \cdot 0 + 1} = -1$$

(4) $n \to +\infty$ のとき

$$\frac{2+3n}{1+n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(2+3n)}{1+n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{n} + 3}{\frac{1}{n^2} + 1} \to 0 \cdot \frac{2 \cdot 0 + 3}{0+1} = 0 \cdot 3 = 0$$

定理 (Squeeze Theorem)

$$a_n \to \alpha, \quad b_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

ならば

$$c_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

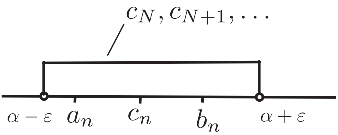
$\forall \varepsilon > 0$ をとる．このとき

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N_1)$$

$$\alpha - \varepsilon < b_n < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N_2)$$

を満たす番号 $N_1$, $N_2$ が存在する．$N = \max(N_1, N_2)$ とすると

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N)$$



**定理**

$|r| < 1$ ならば $r^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$

<u>$0 < r < 1$ のとき</u> $s = \frac{1}{r} = 1 + \theta$ とすると

$$1 < \frac{1}{r} = s = 1 + \theta \quad \text{から} \quad \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n} &= s^n = (1+\theta)^n \\ &= 1 + {}_nC_1\theta + {}_nC_2\theta^2 + {}_nC_3\theta^3 + \ldots + \theta^n \\ &> {}_nC_1\theta = n\theta \end{aligned}$$

から

$$0 < r^n < \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{n}$$

## 等比数列の極限 (2)

$\underline{r = 0\ \text{のとき}}\ r^n = 0 \to 0 \quad (n \to +\infty)$
$\underline{-1 < r < 0\ \text{のとき}}$ $s = -r$ とすると $0 < s < 1$ となり

$$-s^n \leq r^n \leq s^n$$

が分かる．$-s^n, s^n \to 0\ (n \to +\infty)$ からはさみうちの定理を用いると

$$r^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

# 等比数列の極限 (3)

**定理**

$|r| < 1$ ならば $nr^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$

$0 < r < 1$ のとき

$$\frac{1}{r^n} = s^n = (1+\theta)^n > \frac{n(n-1)}{2} \cdot \theta^2$$

から

$$0 < r^n < \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{2}{n(n-1)} \quad \text{従って} \quad 0 < nr^n < \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{2}{n-1}$$

# 等比級数の和

$$
\begin{array}{rrcccccc}
 & S_n & = & 1 & + & r + r^2 + \cdots + r^n & & \\
-) & rS_n & = & & & r + r^2 + \cdots + r^n & + & r^{n+1} \\
\hline
 & (1-r)S_n & = & 1 & & & - & r^{n+1}
\end{array}
$$

から $r \neq 1$ のとき

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$|r| < 1$ のとき

$$S_n \to \frac{1}{1-r} - \frac{r}{1-r} \cdot 0 = \frac{1}{1-r}$$

等比級数の和

$|r| < 1$ のとき　$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$