$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$*_0 \xrightarrow{\frac{1}{2}\times} *_1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\times} *_2 \cdots \xrightarrow{\frac{1}{2}} *_n$

となりますから $\left\{a_n - \frac{2}{3}\cdot 2^n\right\}$ は公差 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることが分かります．よって

$$a_n - \frac{2}{3}\cdot 2^n = \frac{1}{2^n}\left(C - \frac{2}{3}\cdot 1\right)$$

$*_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n *_0$

従って

$$a_n = \left(C - \frac{2}{3}\right)\cdot \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3}\cdot 2^n$$

であることが分かります．

II

$$\begin{array}{rrcccccccccc} & T_n & := & 1\cdot 2 & + & 2\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2^3 & + & \cdots & + & n\cdot 2^n & & \\ -) & 2T_n & = & & & 1\cdot 2^2 & + & 2\cdot 2^3 & + & \cdots & + & (n-1)\cdot 2^n & + & n\cdot 2^{n+1} \\ \hline \end{array}$$

から T_n を求めましょう．

解答

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & T_n & := & 1\cdot 2 & + & 2\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2^3 & + & \cdots & + & n\cdot 2^n & & \\ -) & 2T_n & = & & & 1\cdot 2^2 & + & 2\cdot 2^3 & + & \cdots & + & (n-1)\cdot 2^n & + & n\cdot 2^{n+1} \\ \hline & -T_n & = & 1\cdot 2 & + & 1\cdot 2^2 & + & 1\cdot 2^3 & + & \cdots & + & 1\cdot 2^n & - & n\cdot 2^{n+1} \end{array}$$

から

$$\begin{aligned} T_n &= -\left(2 + 2^2 + \cdots + 2^n\right) + n\cdot 2^{n+1} \\ &= -\frac{2^{n+1} - 2}{2 - 1} + n\cdot 2^{n+1} \\ &= -\left(2^{n+1} - 2\right) + n\cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

$r \neq 1$ のとき $1\cdot r + 2\cdot r^2 + 3r^3 + \cdots + n\cdot r^n = ?$

III 以下の数列の極限を求めましょう．**(1)** $\dfrac{5n^2+1}{3n^2+2}$ **(2)** $\dfrac{2n+1}{4n+3}$ **(3)** $\dfrac{3n-1}{n^2+2}$

(i) $k = 1, 2, 3, \cdots$

$\frac{1}{n^k} \to 0$

$(n \to +\infty)$

解答 (1)

$$\frac{5n^2+1}{3n^2+2} = \frac{5 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} \to \frac{5+0}{3+2\cdot 0} = \frac{5}{3} \quad (n \to +\infty)$$

(ii) $a_n = C$ (定数)

$a_n = C \to C$

$(n \to +\infty)$

(2)

$$\frac{2n+1}{4n+3} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{4 + 3\frac{1}{n}} \to \frac{2+0}{4+3\cdot 0} = \frac{1}{2} \quad (n \to +\infty)$$

(3)

$$\frac{3n-1}{n^2+2} = \frac{3\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + 2\cdot\frac{1}{n^2}} \to \frac{3\cdot 0 - 0}{1 + 2\cdot 0} = 0 \quad (n \to +\infty)$$

2019 年 4 月 24 日小テスト解答

I 差分方程式の初期値問題　$\alpha = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) & (1) \\ a_0 = C & (2) \end{cases}$$

を解きましょう．

解答 (1) の両辺を 2^{n+1} 倍すると

$$2^{n+1} \cdot a_{n+1} - 2^n \cdot a_n = 2 \cdot 4^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

を得ます．これから

$$\begin{array}{rccccl} & 2^n \cdot a_n & - & \cancel{2^{n-1} \cdot a_{n-1}} & = & 2 \cdot 4^{n-1} \\ & \cancel{2^{n-1} \cdot a_{n-1}} & - & \cancel{2^{n-2} \cdot a_{n-2}} & = & 2 \cdot 4^{n-2} \\ & \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ +) & \cancel{2 \cdot a_1} & - & 1 \cdot a_0 & = & 2 \cdot 1 \\ \hline & 2^n \cdot a_n & - & 1 \cdot a_0 & = & 2\left(4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 1\right) \\ & & & & = & 2 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} \\ & & & & = & \frac{2}{3}(4^n - 1) \end{array}$$

となります．従って

$$2^n \cdot a_n = a_0 + \frac{2}{3}(4^n - 1)$$

さらに両辺を 2^n で割って

$$a_n = \frac{C}{2^n} + \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$$

であることが分かります．

別解 α を n によらない定数として $a_n = a \cdot 2^n$ の数列で (1) を満たすものを求めます．すなわち

$$\alpha \cdot 2^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha \cdot 2^n + 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

を満たす定数 α を求めます．この両辺を 2^n で割ると

$$2\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$$

から $\alpha = \frac{2}{3}$ であることが分かります．従って

$$\frac{2}{3} \cdot 2^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2^n + 2^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad (3)$$

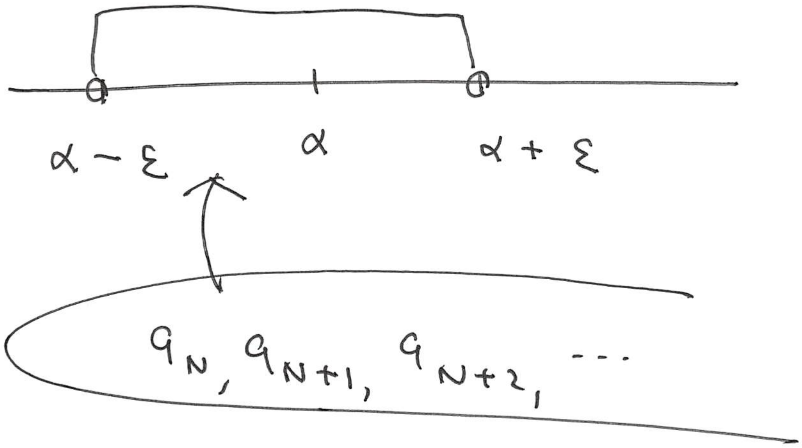
が成立することが分かります．(1)−(3) を考えると

$$a_{n+1} - \frac{2}{3} \cdot 2^{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3} \cdot 2^n\right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 2^n \\ -) & \frac{3}{2} 2^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} 2^n + 2^n \\ \hline & a_{n+1} - \frac{3}{2} 2^{n+1} \\ & = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{3}{2} 2^n\right) \end{array}$$

$a_n \longrightarrow \alpha$

$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists N$ 番号 が存在して



はさみうちの定理 CT23p (定理 1.3)

定理 (Squeeze Theorem)

$$a_n \to \alpha, \quad b_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

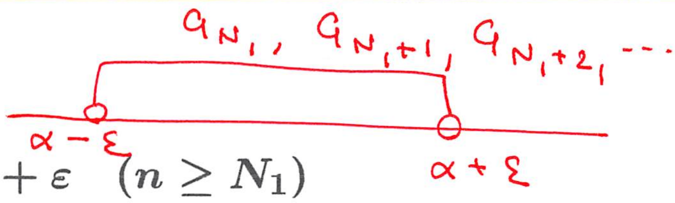
$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

ならば

$$c_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

はさみうちの定理 —証明のアイデア

$\forall \varepsilon > 0$ をとる．このとき

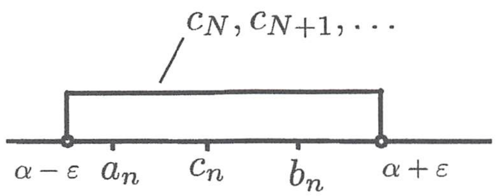


$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N_1)$$

$$\alpha - \varepsilon < b_n < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N_2)$$

を満たす番号 N_1, N_2 が存在する．$N = \max(N_1, N_2)$ とすると

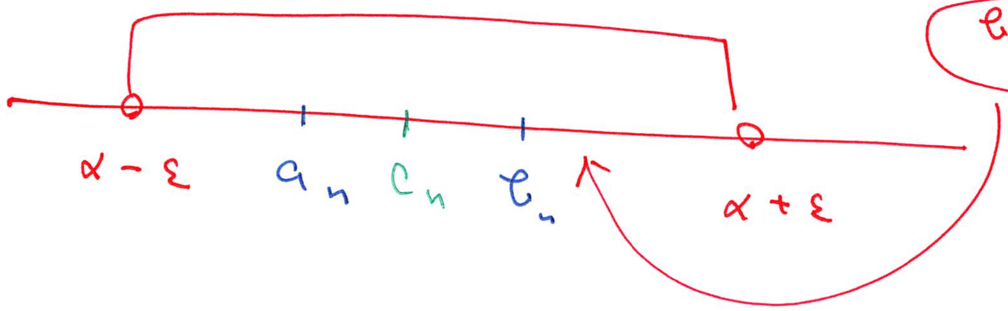
$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N)$$



$N_1 \leq N_2$ $N = N_2$ とする （$N_1 \geq N_2$ のとき $N = N_1$ とする.）

$a_{N_1}, a_{N_1+1}, a_{N_1+2}, \cdots, a_{N_2}, a_{N_2+1}, \cdots$

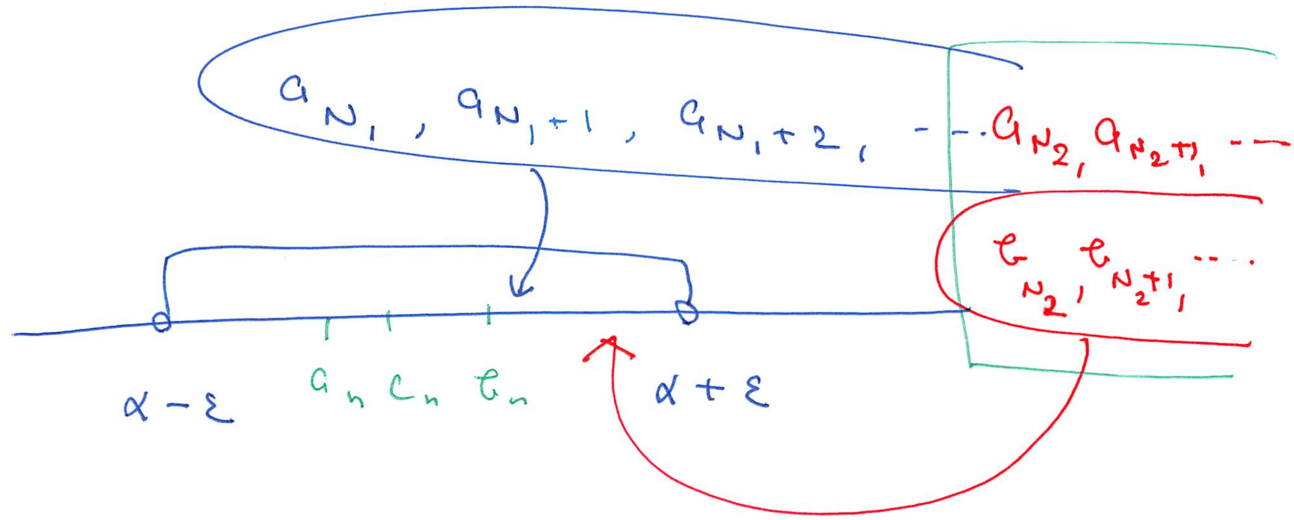
$b_{N_2}, b_{N_2+1}, \cdots$



$n \geq N$ ならば $\rightsquigarrow$ $\alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$

$c_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$

$\forall \varepsilon > 0$ をとる $\exists N_1$ $\exists N_2$ $N_1 \le N_2$ とする $N = N_2$ とする



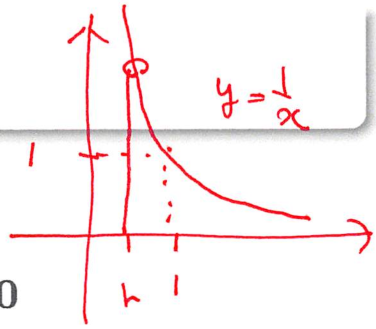
$n \ge N$ とする

$$\alpha - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < \alpha + \varepsilon.$$

$\leadsto$ $c_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$

定理

$|r|<1$ ならば $r^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$



$0<r<1$ のとき $s=\frac{1}{r}=1+\theta$ とすると

$$1<\frac{1}{r}=s=1+\theta \quad から \quad \theta>0$$

$$\frac{1}{r^n}=s^n=(1+\theta)^n$$

$$=1+{}_nC_1\theta+\boxed{{}_nC_2\theta^2}+\boxed{{}_nC_3\theta^3}+\cdots+\theta^n > \boxed{{}_nC_2\theta^2} = \frac{n(n-1)}{2}\theta^2$$

$$> 0 \qquad {}_nC_3\theta^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\theta^3$$

$$>{}_nC_1\theta=n\theta$$

$\to 0$ by Sq. Th.

から

$$0 \longleftarrow 0<r^n<\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{n} \to \frac{1}{\theta}\cdot 0 = 0$$

$r=0$ のとき $r^n=0\to 0 \quad (n\to+\infty)$
$-1<r<0$ のとき $s=-r$ とすると $0<s<1$ となり

$$0 \longleftarrow -s^n \le r^n \le s^n \longrightarrow 0$$

が分かる． $-s^n, s^n \to 0\ (n\to+\infty)$ からはさみうちの定理を用いると

$$r^n \to 0 \quad (n\to+\infty)$$

等比数列の極限 (3)

$n^2 r^n \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$

定理

$|r| < 1$ ならば $nr^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$

<u>$0 < r < 1$ のとき</u>

$$\frac{1}{r^n} = s^n = (1+\theta)^n > \frac{n(n-1)}{2}\cdot\theta^2$$

から

$$0 < r^n < \frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{2}{n(n-1)} \quad 従って \quad 0 < nr^n < \frac{1}{\theta^2}\cdot\boxed{\frac{2}{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{2n}{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{n}} \to 0\cdot\frac{2}{1} = 0$$

等比級数の和

$$\begin{array}{rrcl}
 & S_n & = & 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \\
-) & rS_n & = & \qquad\ \ r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1} \\
\hline
 & (1-r)S_n & = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - r^{n+1}
\end{array}$$

から $r \neq 1$ のとき

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r}{1-r}\cdot r^n$$

$|r| < 1$ のとき

$$S_n \to \frac{1}{1-r} - \frac{r}{1-r}\cdot 0 = \frac{1}{1-r}$$

幾何級数

$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}$

等比級数の和

$|r| < 1$ のとき $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$

信用創造・関数の極限

Nobuyuki TOSE

CalcNT L05, May 16, 2018

信用創造 (Credit Creation)

市中銀行 (Commercial Banks) に預金 d されたとする．預金準備率が x とすると：

$$\begin{tikzcd} & \boxed{xd} \quad \text{中央銀行に} \\ \boxed{d} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{(1-x)d} \quad \text{市中に貸出} \end{tikzcd}$$

信用創造 (2)

市中に貸し出した $(1-x)d$ が預金として還流してくる.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{x(1-x)d}\text{中央銀行に} \\
\boxed{(1-x)d} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \boxed{(1-x)^2 d}\text{市中に貸出}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & x(1-x)^2 d \\
 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (1-x)(1-x)^2 d
\end{tikzcd}
$$

市中に貸出

信用創造 (3)

これを繰り返すと市中に貸し出した金額の合計が

$$
\begin{aligned}
&(1-x)d + (1-x)^2 d + (1-x)^3 d + \cdots \\
&= (1-x)d\,(1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots) \\
&= (1-x)d \cdot \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{(1-x)d}{x}
\end{aligned}
$$

これを預金 d による信用創造 (Creation of Money) と呼びます.

$|r| < 1$ のとき　幾何級数

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

区間 (interval)

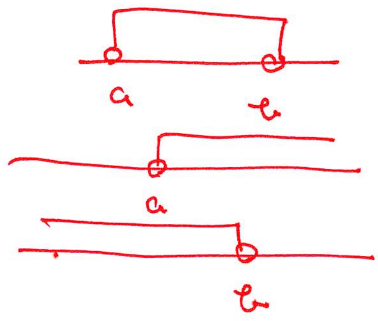
$a < b$ とする．

開区間 (open intervals)]a, b[

$$(a, b) := \{x \in \mathbf{R};\ a < x < b\}$$

$$]a, +\infty[= (a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R};\ a < x\}$$

$$]-\infty, b[= (-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R};\ x < b\}$$



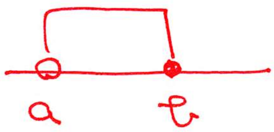
閉区間 (closed intervals) [

$$[a, b] := \{x \in \mathbf{R};\ a \leq x \leq b\}$$

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R};\ a \leq x\}$$

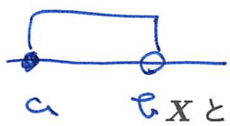
$$] \quad (-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R};\ x \leq b\}$$

注意 $[a, b) := \{x \in \mathbf{R};\ a \leq x < b\}$



$]a, b] = \{a < x \leq b\}$

写像・差集合



[a, b[

X と Y を集合とします．X から Y への写像

$$f:\ X \to Y$$

とは任意の $x \in X$ に対して Y の要素 $f(x) \in Y$ をただ 1 個指定することです．この状況で X を f の定義域，Y を f の値域（終域）と呼びます．

集合 X とその部分集合 A, B があるとします．このとき差集合

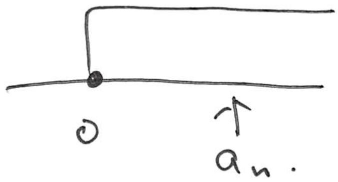
$$A \setminus B := \{x \in A;\ x \in B\}$$

何故「閉」を問か.

定理. $a_n \geq 0 \quad (n=0,1,2,\dots)$

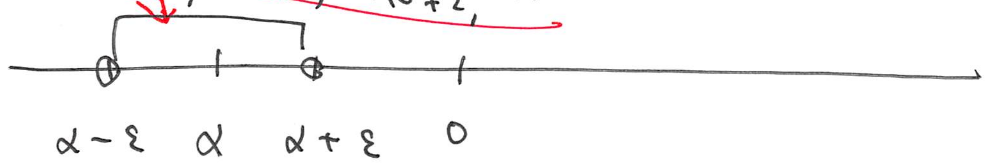
$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$

$\Longrightarrow \quad \alpha \geq 0$



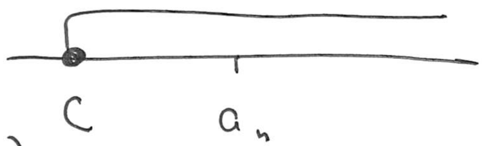
$\alpha < 0$ とする. $\varepsilon = \frac{1}{2}|\alpha| = -\frac{\alpha}{2} > 0$ に対して ∃N が存在して

$a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$



impossible.

系 Corollary



$a_n \geq c \quad (n=0,1,2,\dots)$

$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$

$\Longrightarrow \quad \alpha \geq c$

$a_n - c \geq 0 \quad (n=0,1,2,\dots)$

$a_n - c \to \alpha - c \quad (n \to +\infty)$

$\xrightarrow{\text{定理}} \quad \alpha - c \geq 0 \rightsquigarrow \alpha \geq c$

系

$$a_n \leq b_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$a_n \to \alpha, \quad b_n \to \beta \quad (n \to +\infty)$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \beta$$

$$b_n - a_n \geq 0 \xrightarrow{\text{定理}} \beta - \alpha \geq 0$$

$$\downarrow$$

$$\beta - \alpha$$

$$\rightsquigarrow \alpha \leq \beta$$

2019年5月8日小テスト問題

I 次の数列の極限を求めましょう．

~~(1)~~ $\cancel{\dfrac{5n^2+1}{3n^2+2}}$ ~~(2)~~ $\cancel{\dfrac{2n+1}{4n+3}}$ ~~(3)~~ (1) $\dfrac{3^n+2}{4^n+5}$

II $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$ の値を求めましょう．

II $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}$ を求めて

$n \to +\infty$ にする.

III $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$ の値を求めましょう．