2019 年 4 月 24 日小テスト解答

I 差分方程式の初期値問題

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n + 2^n \quad (n=0,1,2,\ldots) \\ a_0 & = & C \end{array}\right. \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

を解きましょう．

解答 (1) の両辺を 2^{n+1} 倍すると

$$2^{n+1}\cdot a_{n+1} - 2^n\cdot a_n = 2\cdot 4^n \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

を得ます．これから

$$\begin{array}{rrcrcl} & 2^n\cdot a_n & - & 2^{n-1}\cdot a_{n-1} & = & 2\cdot 4^{n-1} \\ & 2^{n-1}\cdot a_{n-1} & - & 2^{n-2}\cdot a_{n-2} & = & 2\cdot 4^{n-2} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ +) & 2\cdot a_1 & - & 1\cdot a_0 & = & 2\cdot 1 \\ \hline & 2^n\cdot a_n & - & 1\cdot a_0 & = & 2\left(4^{n-1}+4^{n-2}+\cdots+1\right) \\ & & & & = & 2\cdot\frac{4^n-1}{4-1} \\ & & & & = & \frac{2}{3}\left(4^n-1\right) \end{array}$$

となります．従って

$$2^n\cdot a_n = a_0 + \frac{2}{3}\left(4^n-1\right)$$

さらに両辺を 2^n で割って

$$a_n = \frac{C}{2^n} + \frac{2}{3}\cdot 2^n - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$$

であることが分かります．

別解 (1) の両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

を得ます．これを $\dfrac{a_n}{2^n}$ に関する差分方程式と考えて解きます．そのために，$\lambda - \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{2}$ を考えると $\lambda = \frac{2}{3}$ となります．これから (3) は

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{a_n}{2^n} - \frac{2}{3}\right)$$

と変形できます．従って

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{2^n} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4^n}\left(a_0 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4^n}\left(C - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

となります．この両辺を 2^n 倍すると a_n は

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{C}{2^n} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$$

となることが分かります．

別解 α を n によらない定数として $a_n = a \cdot 2^n$ の数列で (1) を満たすものを求めます．すなわち

$$\alpha \cdot 2^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha \cdot 2^n + 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

を満たす定数 α を求めます．この両辺を 2^n で割ると

$$2\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$$

から $\alpha = \frac{2}{3}$ であることが分かります．従って

$$\frac{2}{3} \cdot 2^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2^n + 2^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

が成立することが分かります．(1)−(3) を考えると

$$a_{n+1} - \frac{2}{3} \cdot 2^{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3} \cdot 2^n\right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

となりますから $\left\{a_n - \frac{2}{3} \cdot 2^n\right\}$ は公差 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることが分かります．よって

$$a_n - \frac{2}{3} \cdot 2^n = \frac{1}{2^n}(C - \frac{2}{3} \cdot 1)$$

従って

$$a_n = \left(C - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3} \cdot 2^n$$

であることが分かります．

II

$$\begin{array}{rrcccccccccc}
 & T_n & := & 1 \cdot 2 & + & 2 \cdot 2^2 & + & 3 \cdot 2^3 & + \cdots + & n \cdot 2^n & & \\
-) & 2T_n & = & & & 1 \cdot 2^2 & + & 2 \cdot 2^3 & + \cdots + & (n-1) \cdot 2^n & + & n \cdot 2^{n+1} \\
\hline
\end{array}$$

から T_n を求めましょう．

解答

$$\begin{array}{rrcccccccccc}
 & T_n & := & 1 \cdot 2 & + & 2 \cdot 2^2 & + & 3 \cdot 2^3 & + \cdots + & n \cdot 2^n & & \\
-) & 2T_n & = & & & 1 \cdot 2^2 & + & 2 \cdot 2^3 & + \cdots + & (n-1) \cdot 2^n & + & n \cdot 2^{n+1} \\
\hline
 & -T_n & = & 1 \cdot 2 & + & 1 \cdot 2^2 & + & 1 \cdot 2^3 & + \cdots + & 1 \cdot 2^n & - & n \cdot 2^{n+1}
\end{array}$$

から

$$\begin{aligned}
T_n &= -\left(2 + 2^2 + \cdots + 2^n\right) + n \cdot 2^{n+1} \\
&= -\frac{2^{n+1} - 2}{2 - 1} + n \cdot 2^{n+1} = -\left(2^{n+1} - 2\right) + n \cdot 2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$

III 以下の数列の極限を求めましょう． **(1)** $\dfrac{5n^2+1}{3n^2+2}$ **(2)** $\dfrac{2n+1}{4n+3}$ **(3)** $\dfrac{3n-1}{n^2+2}$

解答 **(1)**

$$\frac{5n^2+1}{3n^2+2} = \frac{5+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}} \to \frac{5+0}{3+2\cdot 0} = \frac{5}{3} \quad (n \to +\infty)$$

(2)

$$\frac{2n+1}{4n+3} = \frac{2+\frac{1}{n}}{4+3\frac{1}{n}} \to \frac{2+0}{4+3\cdot 0} = \frac{1}{2} \quad (n \to +\infty)$$

(3)

$$\frac{3n-1}{n^2+2} = \frac{3\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+2\cdot\frac{1}{n^2}} \to \frac{3\cdot 0-0}{1+2\cdot 0} = 0 \quad (n \to +\infty)$$