2018 年 4 月 25 日演習問題解答

I 次の差分方程式を解きましょう．

(1) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3n - 1$

(2) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n + 2n - 1$

(3) $a_0 = 6,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$

(4) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2n$

(5) $a_0 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$

(6) $a_0 = 1,\ \ a_1 = 2,\ a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 0$

(7) $a_0 = 1,\ \ a_1 = 2,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n = 0$

(8) $a_0 = 1,\ \ a_1 = 1,\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

解答 **(1)** 差分方程式を

$$a_{n+1} - a_n = 3n - 1$$

と見ると

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \tag{1}$$

であるので

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (3 \cdot 0 - 1) + (3 \cdot 1 - 1) + (3 \cdot 2 - 1) + \cdots + (3 \cdot (n-1) - 1) \\ &= 1 + 3(0 + 1 + \cdots + (n-1)) - n \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - n = \frac{3n^2 - 5n + 2}{2} \end{aligned}$$

<u>注意</u> (1) から形式的に

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_{\_} + \sum_{k=0}^{n-1} (3k - 1) = \cdots \end{aligned}$$

と進めるのもいいでしょう．上の解答では意味を理解して欲しくて，わざと面倒くさく書いています．

(2) (1) で示したように

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^k + 2k - 1\right) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + 2\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 2\frac{(n-1)n}{2} - n = 2^n + n^2 - 2n \end{aligned}$$

(3) $\lambda = 2\lambda - 3$ を解くと $\lambda = 3$ であるので

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 \tag{2}$$

$$3 = 2 \cdot 3 - 3 \tag{3}$$

において (2)−(3) を考えると

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$$

となる．

(4) 差分方程式 $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

となる．これから $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$ の階差数列を得るので

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{3^n} &= \frac{a_0}{3^0} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{3^{k+1}} - \frac{a_k}{3^k}\right)\\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\\ &= 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\\ &= 1 + \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\end{aligned}$$

から

$$a_n = 3^n + 3^n - 2^n = 2\cdot 3^n - 2^n$$

(5) かります差分方程式 $a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

となる．これから $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ の階差数列を得るので

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{2^n} &= \frac{a_0}{2^0} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{a_k}{2^k}\right)\\ &= 3 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}\\ &= 3 + \frac{\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}\\ &= 3 - 2\left(\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

から

$$a_n = 3^{n+1}$$

別解 差分方程式

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1} \tag{4}$$

の解を（初期条件を考えないで）$a_n = C \cdot 3^n$ の形で求めてみます．すなわち

$$C \cdot 3^{n+1} = 2C \cdot 3^n + 3^{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たす C を求める．この両辺を 3^n で割ると

$$3C = 2C + 3$$

から $C = 3$ を得ます．これから

$$3 \cdot 3^{n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 3^n + 3^{n+1} \tag{5}$$

が成立することが分かりました．さらに (4)−(5) を考えると

$$a_{n+1} - 3 \cdot 3^{n+1} = 2\left(a_n - 3 \cdot 3^n\right)$$

となるので $\{a_n - 3 \cdot 3^n\}$ は公比 2 の等比数列であることが分かります．よって

$$a_n - 3 \cdot 3^n = 2^n(a_0 - 3 \cdot 3^0) = 2^n(3 - 3) = 0$$

から

$$a_n = 3^{n+1}$$

であることが分かります．

(6) 差分方程式 $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 0$ の特性方程式

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

を解くと $\lambda = -5, 1$ となります．これを用いて方程式を

$$\begin{cases} a_{n+2} + 5a_{n+1} & = & a_{n+1} + 5a_n \\ a_{n+2} - a_{n+1} & = & 5(a_{n+1} - a_n) \end{cases}$$

と変形します．これから

$$a_{n+1} + 5a_n = a_1 + 5a_0 \tag{6}$$

$$a_{n+1} - a_n = 5^n(a_1 - a_0) \tag{7}$$

が導かれますが，(6)−(7) から

$$6a_n = a_1 + 5a_0 + 5^n(a_1 - a_0) = 7 + 5^n$$

従って

$$a_n = \frac{7}{6} + \frac{1}{6} \cdot 5^n$$

となります．

(7) 差分方程式 $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$ の特性方程式

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

を解くと $\lambda = 3, -2$ となります．これを用いて方程式を

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} & = & 3(a_{n+1} + 2a_n) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} & = & -2(a_{n+1} - 3a_n) \end{cases}$$

と変形します．これから

$$a_{n+1} + 2a_n = 3^n(a_1 + 2a_0) \tag{8}$$

$$a_{n+1} - 3a_n = (-2)^n(a_1 - 3a_0) \tag{9}$$

が導かれますが，(8)−(9) から

$$\begin{aligned} 5a_n &= 3^n(a_1 + 2a_0) - (-2)^n(a_1 - 3a_0) \\ &= 3^n(2 + 2 \cdot 1) - (-2)^n(2 - 3 \cdot 1) = 4 \cdot 3^n + (-2)^n \end{aligned}$$

従って

$$a_n = \frac{4}{5} \cdot 3^n + \frac{1}{5} \cdot (-2)^n$$

となります．

(8) 差分方程式 $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ の特性方程式

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

を解くと $\lambda = 2$（重根）となります．これを用いて方程式を

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

と変形すると

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n(a_1 - 2a_0) = -2^n$$

となります．この各辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = -\frac{1}{2}$$

となります．これは $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ が公差 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であることを意味します．従って

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_0}{2^0} + n\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{n}{2}$$

から

$$a_n = 2^n - n \cdot 2^{n-1}$$

であることが分かります．

II (1) $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ を計算しましょう．

(2) (1) を用いて

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

を計算しましょう．

解答 (1)

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

(2) (1) から示される

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} =\right)$$

を用いる．ここで $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) \\ &= -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_1) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

III (1) $(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)$ を計算しましょう。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ を計算しましょう。

(3) (2) と同様のテクニックを使って $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)k(k-1)$ と $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ を計算しましょう。

解答 (1)

$$(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) = k(k-1)\{(k+1)-(k-2)\} = 3k(k-1)$$

(2) (1) から

$$k(k-1) = \frac{1}{3}(k+1)k(k-1) - \frac{1}{3}k(k-1)(k-2)$$

が成立します．$f(k) = \frac{1}{3}k(k-1)(k-2)$ とすると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(f(k+1) - f(k)) \\ &= f(n+1) - f(1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) = \frac{1}{3}(n^3 - n)\end{aligned}$$

となります．さらに

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&(k+2)(k+1)k(k-1) - (k+1)k(k-1)(k-2) \\ &= (k+1)k(k-1)\{(k+2)-(k-2)\} = 4(k+1)k(k-1)\end{aligned}$$

から

$$(k+1)k(k-1) = \frac{1}{4}(k+2)(k+1)k(k-1) - \frac{1}{4}(k+1)k(k-1)(k-2)$$

となります．ここで $g(k) = \frac{1}{4}(k+1)k(k-1)(k-2)$ と定めると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(g(k+1)-g(k)\right) \\ &= f(n+1)-f(1) = \frac{1}{4}(n+2)(n+1)n(n-1)\end{aligned}$$

となります．さらに

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^3 &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)k(k-1) + \sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{1}{4}(n+2)(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

と計算されます．

IV (2017/04/26 第 3 講 小テスト問題) 差分方程式

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = p \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす $\{a_n\}$ を a_0, a_1, p を用いて表しましょう．

解答

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

とすると差分方程式は

$$b_{n+1} - b_n = p \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

となる．従って $\{b_n\}$ は公差 p の等差数列であるので

$$b_n = b_0 + np = a_1 - a_0 + np \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

と表される．さらに

$$\begin{aligned}a_n &= a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_0 + (a_1 - a_0) + \{a_1 - a_0 + p\} + \{a_1 - a_0 + 2p\} \\ &\quad \{a_1 - a_0 + 3p\} + \cdots + \{a_1 - a_0 + (n-1)p\} \\ &= a_0 + n(a_1 - a_0) + p\left(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)\right) \\ &= a_0 + n(a_1 - a_0) + \frac{n(n-1)}{2}p\end{aligned}$$

と計算されます．

V (2018/04/25 第 3 講 小テスト問題) 差分方程式

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + \frac{1}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) & (1) \\ a_0 &= C & (2) \end{cases}$$

の解を求めましょう．

解答　(1) の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

を得ます．これから

$$\begin{array}{rcccl} & \frac{a_n}{2^n} & - & \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} & = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \\ & \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} & - & \frac{a_{n-2}}{2^{n-2}} & = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n-2}} \\ & \vdots & & \vdots & \quad \vdots \\ +) & \frac{a_1}{2} & - & \frac{a_0}{1} & = \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \hline & \frac{a_n}{2^n} & - & a_0 & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{4} + 1 \right) \\ & & & & = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \\ & & & & = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) \end{array}$$

となります．従って

$$\frac{a_n}{2^n} = a_0 + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

さらに

$$a_n = C \cdot 2^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$$

であることが分かります．