2019年4月17日小テスト解答

I

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} $$

を用いて

$$ {}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1} $$

を示しましょう．

解答

$(k+1)! = (k+1)\cdot k!$

$(n-k)! = (n-k)\cdot(n-k-1)!$

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{\{(k+1)+(n-k)\}n!}{(k+1)!\underline{(n-k)!}} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\underline{((n+1)-(k+1))!}} = {}_{n+1}C_{k+1} = \text{RHS}
\end{aligned}
$$

$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

II (1)

$$ (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) $$

を計算しましょう．

(2) (1) を用いて $(1+i)^{10}$ を計算しましょう．

解答 (1)

$$
\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\
&= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

(2) (1) から $\alpha = \beta$

$(\cos\alpha + i\sin\cancel{\alpha})^2 = \cos(2\alpha) + i\sin(2\beta)$

$$ (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha $$

を導くことができます．さらに

$$ 1 + i = \sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) $$

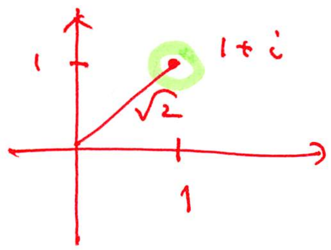
i

が分かりますから，

i

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{10} &= \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{2}\right) \\
&= 2^5\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^5 i
\end{aligned}
$$

i



$\boxed{a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0} \longleftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

特性方程式．

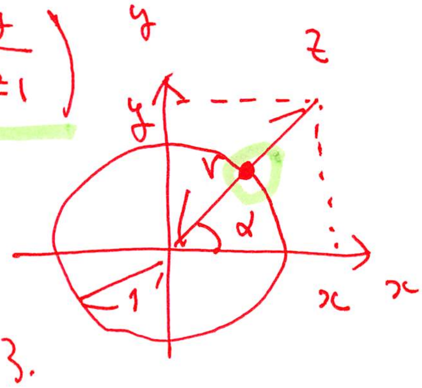
$\lambda = 1 \pm i$．

$z = x + iy \neq 0 \quad (x, y \in \mathbb{R})$

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$$

$|z| = r$

$$\frac{x}{|z|} = \cos\alpha, \quad \frac{y}{|z|} = \sin\alpha$$ とおく.



$$= r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \text{極形式}$$

III

$$\begin{array}{rrcl} & S_n & := & 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n} \\ -) & \frac{1}{4}S_n & = & \cdots \\ \hline \end{array}$$

から S_n を求めましょう.

解答

$$\begin{array}{rrclcccccccc} & S_n & := & 1 & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4^2} & + & \cdots & + & \frac{1}{4^n} & & \\ -) & \frac{1}{4}S_n & := & & & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4^2} & + & \cdots & + & \frac{1}{4^n} & + & \frac{1}{4^{n+1}} \\ \hline & \frac{3}{4}S_n & = & 1 & & & & & & & & & - & \frac{1}{4^{n+1}} \end{array}$$

から

$$S_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \longrightarrow \frac{4}{3}(1-0) = \frac{4}{3}$$

であることが分かります.

$n \longrightarrow +\infty$

階差数列

数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ に対して

$$\beta_n := x_{n+1} - x_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

を階差数列と呼びます.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_0 & \curvearrowright & x_1 & \curvearrowright & x_2 & \curvearrowright & x_3 & \cdots x_{n-1} \curvearrowright & x_n \\
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & +\beta_0 & & +\beta_1 & & +\beta_2 & & +\beta_{n-1} &
\end{array}$$

$x_n - \cancel{x_{n-1}} = \beta_{n-1}$
$\cancel{x_{n-1}} - \cancel{x_{n-2}} = \beta_{n-2}$
$\vdots$
$+)\ \cancel{x_1} - x_0 = \beta_0$
$x_n - x_0 = \beta_{n-1} + \cdots + \beta_0$

このとき

$$\begin{aligned}
x_n &= x_0 + (x_1 - x_0) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \\
&= x_0 + \beta_0 + \cdots + \beta_{n-1}
\end{aligned}$$

階差数列 (2)

$\{\beta_n\}$

~~$\{\beta\}_n$~~ が既知 (known, given) であるとして，差分方程式

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta_n$$

を考える．両辺を α^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{\beta_n}{\alpha^{n+1}}$$

が従う．

$\alpha = 1 + r$

r 利子率

[illegible]率 etc.

$$\frac{a_n}{\alpha^n} - \frac{a_0}{\alpha^0} = \frac{\beta_{n-1}}{\alpha^n} + \cdots + \frac{\beta_0}{\alpha}$$

$$a_n = a_0 \alpha^n + \beta_{n-1} + \beta_{n-2}\alpha + \cdots + \beta_0 \alpha^{n-1}$$

プライマリー・バランス CT 12p

P_n　第 n 年度のプライマリー・バランス
　　(＝財政赤字 − 国債の利払い)

D_n　第 n 年度の国債の残高

r　利子率

とする．このとき

$$D_{n+1} = (1+r)D_n - P_{n+1}$$

← 自分で考える．

両辺を $(1+r)^{n+1}$ で割ると

$$\frac{D_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} - \frac{D_n}{(1+r)^n} = -\frac{P_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}$$

プライマリー・バランス (2)

$$\frac{D_n}{(1+r)^n} = \frac{D_0}{(1+r)^0} + \left(\frac{D_1}{1+r} - \frac{D_0}{(1+r)^0}\right) + \left(\frac{D_2}{(1+r)^2} - \frac{D_1}{1+r}\right) + \cdots + \left(\frac{D_n}{(1+r)^n} - \frac{D_{n-1}}{(1+r)^{n-1}}\right) = D_0 - \frac{P_1}{1+r} - \frac{P_2}{(1+r)^2} - \cdots - \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

から

$$D_n = D_0(1+r)^n - P_1(1+r)^{n-1} - P_2(1+r)^2 - \cdots - P_n$$

注意 「現在割引価値」が分かるとこれは当たり前に思えるはず.

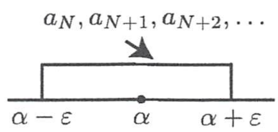
数列の収束 CT 18p

無限数列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

があるとします．このとき $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{に対して} \exists N \text{番号が存在して} \quad \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N)$$



数列の収束

Nobuyuki TOSE

CalcNT, May 08, 2019

命題関数

命題とは真偽がはっきりとしている文のことです．

例　$1 < 2$ は真で，$1 > 2$ は偽の命題です．

X を集合とするとき，$x \in X$ を含み x を指定することによって真偽が定める文を X 上の命題関数と呼びます．

例 $X = \mathbf{R}$ 上の命題関数

$$P(x): \ x > 1$$

P(2) 真　Truth　T

P(0) 偽　False.　F

命題関数 (2)

$\forall$ All

$\exists$ Exists

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ に対して命題

$$\forall x \in X(P(x)) \quad \text{任意の } x \in X \text{ に対して } P(x) \text{ が真}$$

$$\exists x \in X(P(x)) \quad \text{ある } x \in X \text{ に対して } P(x) \text{ が真}$$

が定まります.

例 $X = \mathbf{R}$ 上の命題関数 $P(x) : x > 1$ について

・ $P(0) : 0 > 1$ は偽であるから $\forall x \in X(P(x))$ は偽

・ $P(2) : 2 > 1$ は真であるから $\exists x \in X(P(x))$ は真

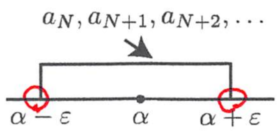
数列の収束 CT 18p

無限数列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

があるとします．このとき $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

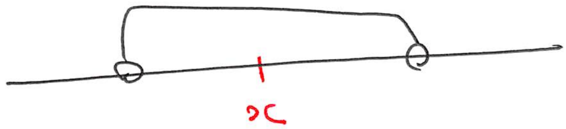
$$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \text{に対して} \exists N \text{番号が存在して}$$
$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N)$$

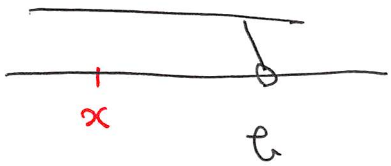


開区間　　$a < b$

1) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

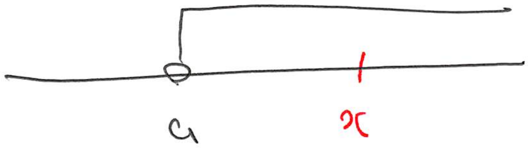
(a, b)



2) 

$]-\infty, b[= \{x < b\}$

$(-\infty, b)$

3) 

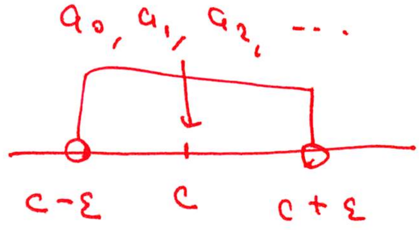
$]a, +\infty[$ $(a, +\infty)$

$= \{x > a\}$

4) $\mathbb{R}$

数列の収束 (2)–例

$\forall \varepsilon > 0$



例 1 定数列 $a_n = c$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ とすると

$$a_n \to c \quad (n \to +\infty)$$

実際，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$c - \varepsilon < a_n = c < c + \varepsilon$$

$N = 0$ でOK

例 2 $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ とすると

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

$\varepsilon > 0$ が与えられたとする.

$\frac{1}{N}, \frac{1}{N+1}, \ldots$

数列の収束 (3)–例

$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = N - 1$ とすると

$$\frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = N$$

$\to \frac{1}{N} < \varepsilon$

従って $n \geq N$ とすると

$$-\varepsilon + 0 < 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon + 0$$

$0 + \varepsilon$

注意 ここで Gauss 記号の性質

$$x - 1 < [x] \leq x \quad (x \in \mathbf{R})$$

$[12] = 12$

$[12.3] = 12 > 11.3$

を用いました．($x \in \mathbf{R}$ に対して $[x]$ は x の整数部分)

成立するのは x が整数のとき.

$b_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$

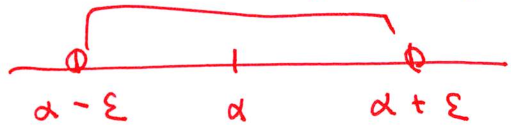
$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$

$a_{N-n_0}, \quad a_{N-n_0+1}, \quad a_{N-n_0+2}$

$\quad \shortparallel \qquad\quad \shortparallel$

$b_N, \quad b_{N+1}, \quad b_{N+2}, \quad \cdots$



$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$

が言える.

収束する数列の性質

定理 1.1 CT20p

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に収束するとします：

$$a_n \to \alpha, \quad b_n \to \beta \quad (n \to +\infty)$$

(i) $a_n \pm b_n \to \alpha \pm \beta \quad (n \to +\infty)$
(ii) $a_n \cdot b_n \to \alpha \cdot \beta \quad (n \to +\infty)$
(iii) すべての番号に対して $a_n \neq 0$, $\alpha \neq 0$ とすると

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\beta}{\alpha} \quad (n \to +\infty)$$

証明は CT にあります．

定理 1.1 の応用例 CT 22p

(1) $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 \quad (n \to +\infty)$
これを繰り返すと $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$$

$\vdots$

$$\frac{1}{n^k} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

(2) $a_n = \dfrac{1}{3+n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$

注意 $b_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$ ならば

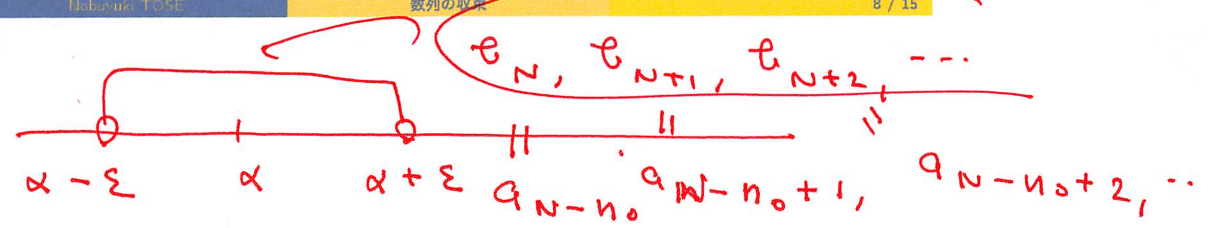
$$a_n := b_{n+n_0} \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

この注意は収束の定義から示せます．この注意を

$$b_n := \frac{1}{n} \quad \text{に対して} \quad a_n := \frac{1}{n+3} = b_{n+3}$$

$\{a_n\}$ に対し $N - n_0$ ととる

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$



$3 \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 3 \cdot 0 = 0$

$3 \cdot \frac{1}{n} + 1 \longrightarrow 0 + 1 = 1$

定理の応用例 (2) CT 22p

$\frac{1}{3 \cdot \frac{1}{n} + 1} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1$

別の理解 $n \to +\infty$ のとき

$\to 1$

$$\frac{1}{3+n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{3+n} = \frac{1}{n} \cdot \boxed{\frac{1}{3 \cdot \frac{1}{n} + 1}} \to 0 \cdot \frac{1}{3 \cdot 0 + 1} = 0 \cdot 1 = 0$$

(3) $n \to +\infty$ のとき

$$\frac{4-n}{5+n} = \frac{4 \cdot \frac{1}{n} - 1}{5 \cdot \frac{1}{n} + 1} \to \frac{4 \cdot 0 - 1}{5 \cdot 0 + 1} = -1$$

(4) $n \to +\infty$ のとき

$$\frac{2+3n}{1+n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(2+3n)}{1+n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{n} + 3}{\frac{1}{n^2} + 1} \to 0 \cdot \frac{2 \cdot 0 + 3}{0 + 1} = 0 \cdot 3 = 0$$

はさみうちの定理 CT23p (定理 1.3)

定理 (Squeeze Theorem)

$$a_n \to \alpha, \quad b_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$
$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

ならば

$$c_n \to \alpha \quad (n \to +\infty)$$

2019年4月25日小テスト問題

I 差分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) & (1) \\ a_0 = C & (2) \end{cases}$$

を解きましょう.

II

$$\begin{array}{rrccccccccccc} & T_n & := & 1\cdot 2 & + & 2\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2^3 & + & \cdots & + & n\cdot 2^n & \\ -) & 2T_n & = & & & 1\cdot 2^2 & + & 2\cdot 2^3 & + & \cdots & + & (n-1)\cdot 2^n & + \ n\cdot 2^{n+1} \\ \hline \end{array}$$

から T_n を求めましょう.

極限を求める

III (1) $\dfrac{5n^2+1}{3n^2+1}$ (2) $\dfrac{2n+1}{4n+3}$ (3) $\dfrac{3n-1}{n^2+2}$