2019 年 4 月 17 日小テスト解答

I

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} $$

を用いて

$$ {}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1} $$

を示しましょう．

解答

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{\{(k+1)+(n-k)\}n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = {}_{n+1}C_{k+1} = \mathrm{RHS}
\end{aligned}
$$

II (1)

$$ (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) $$

を計算しましょう．

(2) (1) を用いて $(1+i)^{10}$ を計算しましょう．

解答 **(1)**

$$
\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\
&= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

(2) (1) から

$$ (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha $$

を導くことができます．さらに

$$ 1+i = \sqrt{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) $$

が分かりますから，

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{10} &= \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) \\
&= 2^5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^5 i
\end{aligned}
$$

III

$$\begin{array}{rrl} & S_n & := \quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n} \\ -) & \frac{1}{4}S_n & = \qquad\qquad \cdots \\ \hline \end{array}$$

から S_n を求めましょう.

解答

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & S_n & := & 1 & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4^2} & + & \cdots & + & \frac{1}{4^n} & & \\ -) & \frac{1}{4}S_n & := & & & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4^2} & + & \cdots & + & \frac{1}{4^n} & + & \frac{1}{4^{n+1}} \\ \hline & \frac{3}{4}S_n & = & 1 & & & & & & & & & - & \frac{1}{4^{n+1}} \end{array}$$

から

$$S_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

であることが分かります.