2019 年 4 月 17 日演習問題解答

I 以下の和を求めましょう。

(1) $S_n := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

(2) $T_n := 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

Hint:

$$\begin{array}{rrcllll} & T_n & = & 1+ & 2 \cdot \frac{1}{2} & +3 \cdot \frac{1}{2^2} & + \dots \\ -) & \frac{1}{2}T_n & = & & 1 \cdot \frac{1}{2} & +2 \cdot \frac{1}{2^2} & + \dots \\ \hline \end{array}$$

(3) $T_n := 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$

解答 **(1)**

$$\begin{array}{rrclllll} & S_n & = & 1+ & \frac{1}{3} & +\frac{1}{3^2} & + \dots & +\frac{1}{3^n} & \\ -) & \frac{1}{3}S_n & = & & \frac{1}{3} & +\frac{1}{3^2} & + \dots & +\frac{1}{3^n} & +\frac{1}{3^{n+1}} \\ \hline & \frac{2}{3}S_n & = & 1 & & & & & -\frac{1}{3^{n+1}} \end{array}$$

から

$$S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

が従います.

(2)

$$\begin{array}{rrcllllll} & T_n & = & 1+ & 2 \cdot \frac{1}{2} & +3 \cdot \frac{1}{2^2} & + \dots & +n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} & \\ -) & \frac{1}{2}T_n & = & & 1 \cdot \frac{1}{2} & +2 \cdot \frac{1}{2^2} & + \dots & +(n-1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} & +n\frac{1}{2^n} \\ \hline & \frac{1}{2}T_n & = & 1+ & 1 \cdot \frac{1}{2} & +1 \cdot \frac{1}{2^2} & + \dots & +1 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} & -n\frac{1}{2^n} \end{array}$$

から

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - n\frac{1}{2^n}$$

従って

$$T_n = 4(1 - \frac{1}{2^n}) - n\frac{1}{2^{n-1}}$$

となります.

(3)

$$\begin{array}{rrcllllll} & T_n & = & 1+ & 2 \cdot 3 & +3 \cdot 3^2 & + \dots & +n \cdot 3^{n-1} & \\ -) & 3T_n & = & & 1 \cdot 3 & +2 \cdot 3^2 & + \dots & +(n-1) \cdot 3^{n-1} & +n \cdot 3^n \\ \hline & -2T_n & = & 1+ & 1 \cdot 3 & +1 \cdot 3^2 & + \dots & +1 \cdot 3^{n-1} & -n \cdot 3^n \end{array}$$

から

$$-2T_n = \frac{3^n - 1}{3 - 1} - n \cdot 3^n$$

従って

$$T_n = \frac{1 - 3^n}{4} + \frac{1}{2}n \cdot 3^n$$

となります.

II(1) 講義中

$$_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

を用いて

$$k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

を示しました.n 個の違いのない白玉から 1 個と $(k-1)$ 個を選んで,1 個の方を赤く塗り,$(k-1)$ 個の方に黒く塗る組み合わせの数としてこの等式を説明しましょう.

(2) (1) と同様に

$$_kC_2 \cdot {}_nC_k = {}_nC_2 \cdot {}_{n-2}C_{k-2}$$

を示しましょう.

解答 (1) まず n 個から k 個選ぶのは $_nC_k$ 通りある．選んだ k 個から 1 個選ぶのは $_kC_1 = k$ 通りである．よって

$$k \cdot {}_nC_k \text{通り}$$

ある．他方，n 個から 1 個選び，残る $(n-1)$ 個から $(k-1)$ 個選ぶと

$$_nC_1 \cdot {}_{n-1}C_{k-1} = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}\text{通り}$$

よって

$$k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

(2) n 個から 2 個と $k-2$ 個を選ぶ組み合わせの数を 2 通りの考え方で求める．

<u>方法 I</u> n 個から $k = 2 + (k-2)$ 個選び，その k 個から 2 個選ぶと

$$_nC_k \cdot {}_kC_2\text{通り}$$

<u>方法 II</u> n 個から 2 個選び，残る $n-2$ 個から $k-2$ 個選ぶと

$$_nC_2 \cdot {}_{n-2}C_{k-2}\text{通り}$$

よって

$$_kC_2 \cdot {}_nC_k = {}_nC_2 \cdot {}_{n-2}C_{k-2}$$

III $(x+y)^5$ を展開しましょう.

解答

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

上の Pascal の三角形から

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

と展開されます.

IV 以下の組み合わせの数を求めましょう.
(1) ${}_5C_2$ **(2)** ${}_5C_3$ **(3)** ${}_6C_1$ **(4)** ${}_7C_2$ **(5)** ${}_8C_3$

解答 **(1)** ${}_5C_2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10$
(2) ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$ または ${}_5C_3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10$
(3) ${}_6C_1 = \frac{6}{1} = 6$
(4) ${}_7C_2 = \frac{7\cdot6}{2\cdot1} = 21$
(5) ${}_8C_3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$