2 項定理

Nobuyuki TOSE

April 18, 2019

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & x(x+y)^3 & = & x^4 & + & 3\cdot x^3y & + & 3\cdot x^2y^2 & + & 1\cdot xy^3 & & \\
+) & y(x+y)^3 & = & & & 1\cdot x^3y & + & 3\cdot x^2y^2 & + & 3\cdot xy^3 & + & y^4 \\
\hline
 & (x+y)^4 & = & x^4 & + & 4\cdot x^3y & + & 6\cdot x^2y^2 & + & 4\cdot xy^3 & + & y^4
\end{array}
$$

Pascal の三角形

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1}
\end{array}
$$

2 項定理

定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k y^{n-k}$$

ここで ${}_nC_k$ は番号のついた n 個のものから k 個選ぶ選び方です．

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}\cdots\boxed{\text{n}}$

$${}_nC_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

となります．Pascal の三角形から

$${}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1}$$

であることが分かります．

2 項定理の説明

$$(x+y)^n = \underset{\boxed{1}}{(x+y)}\ \underset{\boxed{2}}{(x+y)}\ \underset{\boxed{3}}{(x+y)} \cdots \underset{\boxed{n}}{(x+y)}$$

x を選ぶ番号を k 個選ぶ場合の数は ${}_nC_k$ 通りある．選ばなかった $n-k$ 個の番号では y を選ぶ．この結果

$${}_nC_k x^k y^{n-k}$$

が出てくる．

Pascal の三角形（説明）—No. 1

$$(x+y)^n = \cdots + {}_nC_k x^k y^{n-k} + {}_nC_{k+1} x^{k+1} y^{n-k-1} + \cdots$$

から

$$\begin{array}{rcccccc}
x(x+y)^n & = & \cdots & + & {}_nC_k x^{k+1} y^{n-k} & + & \cdots \\
y(x+y)^n & = & \cdots & + & {}_nC_{k+1} x^{k+1} y^{n-k} & + & \cdots \\
\hline
(x+y)^{n+1} & = & \cdots & + & {}_{n+1}C_{k+1} x^{k+1} y^{n-k} & + & \cdots
\end{array}$$

Pascal の三角形（説明）—No 2

番号が付いている箱が $n+1$ 個あるとします.

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \cdots \quad \boxed{n} \quad \boxed{n+1}$$

これから $k+1$ 個選ぶ場合の数は

$\boxed{n+1}$ を選ばない場合　$_{n}C_{k+1}$

$\boxed{n+1}$ を選ぶ場合　$_{n}C_{k}$

従って

$$_{n+1}C_{k+1} = {}_{n}C_{k} + {}_{n}C_{k+1}$$

2 項分布

港北区に成人が N 人いるとする．全員が A 党または B 党の支持者で

- A 党支持者は N_1 人
- B 党支持者は N_2 人

とする．N 人からランダムに 1 人選ぶとすると

- A 党支持者が選ばれる確率は $p := \frac{N_1}{N}$
- B 党支持者が選ばれる確率は $q := \frac{N_2}{N}$

1 人選んでは元に戻すという試行を n 回行うとする．

$$X \quad \text{A 党支持者が選ばれる回数} \quad (X = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$$

とすると $X = k$ である確率は

$$P(X = k) = {}_nC_k p^k q^{n-k}$$

全確率=1

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

期待値(expected value)

$$E[X] := \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_nC_k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_nC_k p^k q^{n-}$$

ここで $k \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} k \cdot {}_nC_k &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1} \end{aligned}$$

2 項分布–期待値

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=1}^{n} n \cdot {}_{n-1}C_{k-1} p^k q^{n-k} \\
&\ell = k - 1 \text{ とする} \\
&= n \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1}C_{\ell} p^{\ell+1} q^{n-\ell-1} \\
&= np \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1}C_{\ell} p^{\ell} q^{(n-1)-\ell} \\
&= np(p+q)^{n-1} = np1^{n-1} = np
\end{aligned}
$$

2 項変数–期待値

$$
E[X] = np
$$