2019 年 4 月 10 日小テスト解答

I 差分方程式の初期値問題

$$a_{n+1} = 2a_n - 2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad a_0 = \alpha$$

を解きましょう．

解答方程式 $\lambda = 2\lambda - 2$ を解くと $\lambda = 2$ となるので

$$\begin{array}{rrcll} & a_{n+1} & = & 2 \cdot a_n - 2 & \cdots (i) \\ -) & 2 & = & 2 \cdot 1 - 2 & \cdots (ii) \\ \hline & a_{n+1} - 2 & = & 2(a_n - 2) & \cdots (iii) \end{array}$$

← 2

を得ます．(iii) 式は数列 $\{a_n - 2\}$ が公比 2 の等比数列であることを意味しますから

$$a_n - 2 = 2^n(a_0 - 2) = 2^n(\alpha - 2) \quad \text{すなわち} \quad a_n = 2^n(\alpha - 2) + 2$$

であることが分かります．

$\underbrace{a_0 - 2 \xrightarrow[\times 2]{} a_1 - 2 \xrightarrow[\times 2]{} \cdots \xrightarrow[\times 2]{} a_n - 2}_{n\text{ステップ}}$

II 差分方程式の初期値問題

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

を解きましょう．

$2 = (-1) + 3 \quad -3 = \cancel{(-3) \cdot 1}\ (-1) \cdot 3$

解答特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ を解くと $\lambda = -1, 3$ となりますから，差分方程式は

$$a_{n+2} - (3 + (-1))a_{n+1} + (-1)3a_n = 0$$

とみることができます．これを

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} = (-1)(a_{n+1} - 3a_n) & \cdots (i) \\ a_{n+2} + a_{n+1} = 3(a_{n+1} + a_n) & \cdots (ii) \end{cases}$$

と変形できます．(i) 式から $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は公比 (-1) の等比数列であることがわかりますから

$a_1 - 3a_0 \xrightarrow[\times(-1)]{} a_2 - 3a_1 \to \cdots \xrightarrow[\times(-1)]{}$

$$\boxed{a_{n+1} - 3a_n} = (-1)^n(a_1 - 3a_0) \tag{iii}$$

となります．他方 (ii) 式から $\{a_{n+1} + a_n\}$ は公比 3 の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} + a_n = 3^n(a_1 + a_0) \tag{iv}$$

$a_1 + a_0 \xrightarrow[\times 3]{} a_2 + a_1 \to \cdots \cdots \xrightarrow[\times 3]{} a_{n+1} + a_n$

となります．(iv)−(iii) から

$$4a_n = 3^n(a_1 + a_0) - (-1)^n(a_1 - 3a_0)$$

従って

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n \frac{a_1 + a_0}{4} - (-1)^n \frac{a_1 - 3a_0}{4} \\ &= 3^n \frac{\beta + \alpha}{4} - (-1)^n \frac{\beta - 3\alpha}{4} \end{aligned}$$

であることが分かります.

$-6 = (-3) + (-3)$

$9 = (-3) \cdot (-3)$

III 差分方程式の初期値問題

$$a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

を解きましょう. $(\lambda + 3)^2$

$\shortparallel$

解答特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ を解くと $\lambda = -3$（重根）となりますから，差分方程式は

$$a_{n+2} - ((-3) + (-3))a_{n+1} + (-3) \cdot (-3)a_n = 0$$

とみることができます．これを

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} = (-3)(a_{n+1} + 3a_n)$$

と変形できます．(i) 式から $\{a_{n+1} + 3a_n\}$ は公比 -3 の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} + 3a_n = (-3)^n(a_1 + 3a_0) \tag{i}$$

となります．(i) 式の両辺を $(-3)^{n+1}$ で割ると

$*$ $\shortparallel$ ← nに依らない

independent of n.

$$\frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} - \frac{a_n}{(-3)^n} = \boxed{-\frac{a_1 + 3a_0}{3}}$$

が従いますが，これは $\{\frac{a_n}{(-3)^n}\}$ が公差 $-\frac{a_1+3a_0}{3}$ の等差数列であることを意味します．従って

$$\frac{a_n}{(-3)^n} = \frac{a_0}{(-3)^0} - \frac{(a_1 + 3a_0)n}{3}$$

から　両辺を $(-3)^n$ 倍すると

$$\begin{aligned} a_n &= a_0(-3)^n + (-3)^{n-1}n(a_1 + 3a_0) \\ &= \alpha(-3)^n + (\beta + 3\alpha)n(-3)^{n-1} \end{aligned}$$

であることが分かります.

$$\frac{a_0}{(-3)^0} \xrightarrow[+*]{} \frac{a_1}{(-3)^1} \xrightarrow[+*]{} \frac{a_2}{(-3)^2} \rightarrow \cdots \xrightarrow[+*]{} \frac{a_n}{(-3)^n}$$

Binomial Theorem

2 項定理

Nobuyuki TOSE

April 18, 2019

2 項定理

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^2
\end{aligned}
$$

4

ここで

$$
\begin{array}{rrcccccccccc}
 & x(x+y)^3 & = & x^4 & + & 3\cdot x^3y & + & 3\cdot x^2y^2 & + & 1\cdot xy^3 & & \\
+) & y(x+y)^3 & = & & & 1\cdot x^3y & + & 3\cdot x^2y^2 & + & 3\cdot xy^3 & + & y^4 \\
\hline
 & (x+y)^4 & = & x^4 & + & 4\cdot x^3y & + & 6\cdot x^2y^2 & + & 4\cdot xy^3 & + & y^4
\end{array}
$$

Pascal の三角形

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$3 + 3 = 6$

${}_3C_1 + {}_3C_2 = {}_4C_2$

${}_nC_k = \binom{n}{k}$

2 項定理

定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k y^{n-k}$$

ここで ${}_nC_k$ は番号のついた n 個のものから k 個選ぶ選び方です．

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3} \cdots \boxed{\mathrm{n}}$

説明できるか？

$${}_nC_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

となります．Pascal の三角形から

$${}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1}$$

であることが分かります．

2 項定理の説明

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & & \boxed{\text{n}} \\
(x+y)^n & = & (x+y) & (x+y) & (x+y) & \cdots & (x+y)
\end{array}
$$

x を選ぶ番号を k 個選ぶ場合の数は ${}_nC_k$ 通りある．選ばなかった $n-k$ 個の番号では y を選ぶ．この結果

$$ {}_nC_k x^k y^{n-k} $$

が出てくる．

Pascal の三角形（説明）—No. 1

$$ (x+y)^n = \cdots + {}_nC_k x^k y^{n-k} + {}_nC_{k+1} x^{k+1} y^{n-k-1} + \cdots $$

から

$$
\begin{array}{rcccc}
x(x+y)^n & = & \cdots + & {}_nC_k x^{k+1} y^{n-k} & + \cdots \\
+)\ y(x+y)^n & = & \cdots + & {}_nC_{k+1} x^{k+1} y^{n-k} & + \cdots \\
\hline
(x+y)^{n+1} & = & \cdots + & {}_{n+1}C_{k+1} x^{k+1} y^{n-k} & + \cdots
\end{array}
$$

Pascal の三角形（説明）—No 2

番号が付いている箱が $n+1$ 個あるとします．

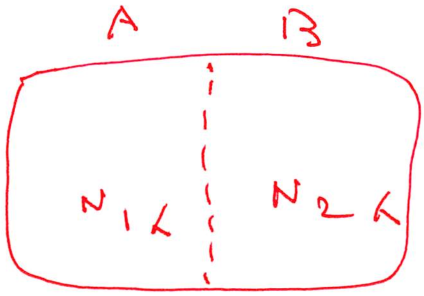
$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \cdots\ \boxed{n}\ \boxed{n+1}$$

これから $k+1$ 個選ぶ場合の数は

$$\begin{array}{rl} \boxed{n+1}\text{を選ばない場合} & {}_nC_{k+1} \\ \boxed{n+1}\text{を選ぶ場合} & {}_nC_k \end{array}$$

従って

$$ {}_{n+1}C_{k+1} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1} $$



2 項分布

港北区に成人が N 人いるとする．全員が A 党または B 党の支持者で

- A 党支持者は N_1 人
- B 党支持者は N_2 人

とする．N 人からランダムに 1 人選ぶとすると

- A 党支持者が選ばれる確率は $p := \frac{N_1}{N}$
- B 党支持者が選ばれる確率は $q := \frac{N_2}{N}$

1 人選んでは元に戻すという試行を n 回行うとする．

$$X \quad \text{A 党支持者が選ばれる回数} \quad (X = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$$

とすると $X = k$ である確率は

$$P(X = k) = {}_nC_k p^k q^{n-k}$$

復元抽出 ≒ 非復元抽出．

Nが大きいとき．

2 項分布–期待値

全確率=1

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

期待値(expected value)

$$E[X] := \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_nC_k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_nC_k p^k q^{n-k}$$

ここで $k \geq 1$ のとき

$$k \cdot {}_nC_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$
$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

$n!$ 定義の認識 $0! = 1$

$n \geq 1$ のとき $n! = n \cdot (n-1)!$

帰納的な定義

$$\boxed{k \geq 1 \text{のとき} \quad k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}}$$

2 項分布–期待値

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} \boxed{n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}} p^k q^{n-k}$$

$= k \cdot {}_nC_k$

$\ell = k-1$ とする

k	$\ell = k-1$
1	0
2	1
⋮	⋮
n	$n-1$

$$= n \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1}C_\ell p^{\ell+1} q^{n-\ell-1}$$
$$= np \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1}C_\ell p^\ell q^{(n-1)-\ell}$$
$$= np(p+q)^{n-1} = np1^{n-1} = np$$

2項定理

2 項変数–期待値

$$E[X] = np$$

クモの巣過程・階差数列・数列の収束

Nobuyuki TOSE

CalcNT, April 15, 2018

クモの巣過程 CT 35p

ある生産物に対して

$$p\text{: 価格},\ D\text{: 需要量},\ S\text{: 供給量}$$

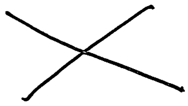
$$\begin{aligned} \text{需要曲線}D: &\ p = aD + b \\ \text{供給曲線}S: &\ p = a'S + b' \end{aligned}$$

前提 $a \neq a'$ この条件は D と S が 1 点で交わることと必要十分である．

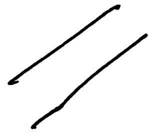
$S = \frac{1}{a'}(p - b')$

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

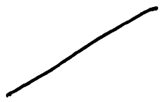
1) $a \neq a'$ 1点で交わる



2) $a = a'$, $b \neq b'$ 2直線は平行



3) $a = a'$, $b = b'$ 同一



供給量と価格の時系列

第 t 期の供給量 x_t, 価格 p_t

$$\text{第 } t \text{ 期の供給量} x_t \xrightarrow{D} p_t = a x_t + b$$
$$\xrightarrow{S} x_{t+1} = \frac{1}{a'}(p_t - b')$$

p_t を消去して

$$x_{t+1} = \frac{a}{a'} x_t + \frac{b - b'}{a'} \qquad (1)$$

となる.

$$\lambda = \frac{a}{a'}\lambda + \frac{b - b'}{a'}$$

を解くと

$$\lambda = \lambda_0 := \frac{b - b'}{a' - a} \qquad (2)$$

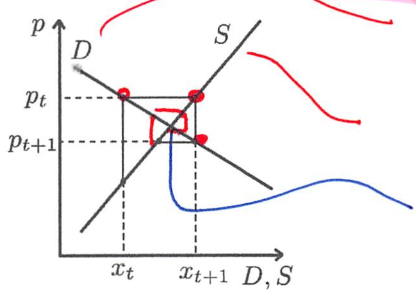
$S = \frac{1}{a'}(p - b')$

くもの巣過程.
Web プロセス

図

これを用いると (1) は　$x_{t+1} - \lambda_0 = \frac{a}{a'}(x_t - \lambda_0)$

$$x_t = \left(\frac{a}{a'}\right)^t (x_0 - \lambda_0) + \lambda_0$$



$P = aD + b$　　$P_t = a x_t + b$

$S = \frac{1}{a'}(P - b')$　　$x_{t+1} = \frac{1}{a'}(P_t - b')$

$(\lambda_0, a\lambda_0 + b)$

供給量と価格の時系列 (2)

$\left(\frac{a}{a'}\right)^t \to 0 \quad (t \to +\infty)$

$\left|\frac{a}{a'}\right| < 1$ ならば

$$x_t \to \lambda_0 \quad (t \to +\infty)$$

$= \left(\frac{a}{a'}\right)^t (x_0 - \lambda_0) + \lambda_0$

が分かる．このとき

$$p_t = ax_t + b \to a\lambda_0 + b \quad (t \to +\infty)$$

注意 $|r| < 1$ ならば $r^n \to 0$ $(n \to +\infty)$
注意 $(x, p) = (\lambda_0, a\lambda_0 + b)$ は 2 直線

$$\begin{cases} p = ax + b \\ p = a'x + b' \end{cases}$$

の交点である．

階差数列

数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ に対して

$$\beta_n := x_{n+1} - x_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

を階差数列と呼びます．

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & \cdots & & & x_n \\ & \vee & & \vee & & \vee & & & & \vee & \\ & \beta_0 & & \beta_1 & & \beta_2 & & & & \beta_{n-1} & \end{array}$$

このとき

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + (x_1 - x_0) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_0 + \beta_0 + \cdots + \beta_{n-1} \end{aligned}$$

I $\quad {}_nC_k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ を用いて

$${}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1}$$

を示す.

II (1) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = ?$

(2) $(1+i)^{10}$ を (1) を使って計算

Hint $\quad 1+i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

III

$$
\begin{array}{rl}
S_n = & 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{4^n} \\
-)\ \dfrac{1}{4}S_n = & \quad\ \dfrac{1}{4} + \cdots \\
\hline
\end{array}
$$

を用いて S_n を求める.