2019 年 4 月 10 日小テスト解答

I 差分方程式の初期値問題

$$a_{n+1} = 2a_n - 2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad a_0 = \alpha$$

を解きましょう．

解答方程式 $\lambda = 2\lambda - 2$ を解くと $\lambda = 2$ となるので

$$\begin{array}{rrcll} & a_{n+1} & = & 2 \cdot a_n - 2 & \cdots (i) \\ -) & 2 & = & 2 \cdot 1 - 2 & \cdots (ii) \\ \hline & a_{n+1} - 2 & = & 2(a_n - 2) & \cdots (iii) \end{array}$$

を得ます．(iii) 式は数列 $\{a_n - 2\}$ が公比 2 の等比数列であることを意味しますから

$$a_n - 2 = 2^n (a_0 - 2) = 2^n (\alpha - 2) \quad \text{すなわち} \quad a_n = 2^n (\alpha - 2) + 2$$

であることが分かります．

II 差分方程式の初期値問題

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

を解きましょう．

解答特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ を解くと $\lambda = -1, 3$ となりますから，差分方程式は

$$a_{n+2} - (3 + (-1))a_{n+1} + (-1)3a_n = 0$$

とみることができます．これを

$$\left\{ \begin{array}{rcll} a_{n+2} - 3a_{n+1} & = & (-1)(a_{n+1} - 3a_n) & \cdots (i) \\ a_{n+2} + a_{n+1} & = & 3(a_{n+1} + a_n) & \cdots (ii) \end{array} \right.$$

と変形できます．(i) 式から $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は公比 (-1) の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} - 3a_n = (-1)^n (a_1 - 3a_0) \tag{iii}$$

となります．他方 (ii) 式から $\{a_{n+1} + a_n\}$ は公比 3 の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} + a_n = 3^n (a_1 + a_0) \tag{iv}$$

となります．(iv)$-$(iii) から

$$4a_n = 3^n (a_1 + a_0) - (-1)^n (a_1 - 3a_0)$$

従って

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n \frac{a_1 + a_0}{4} - (-1)^n \frac{a_1 - 3a_0}{4} \\ &= 3^n \frac{\beta + \alpha}{4} - (-1)^n \frac{\beta - 3\alpha}{4} \end{aligned}$$

であることが分かります．

III 差分方程式の初期値問題

$$a_{n+2}+6a_{n+1}+9a_n=0 \quad (n=0,1,2,\ldots), \quad a_0=\alpha, a_1=\beta$$

を解きましょう．

解答特性方程式 $\lambda^2+6\lambda+9=0$ を解くと $\lambda=-3$（重根）となりますから，差分方程式は

$$a_{n+2}-((-3)+(-3))a_{n+1}+(-3)\cdot(-3)a_n=0$$

とみることができます．これを

$$a_{n+2}+3a_{n+1}=(-3)(a_{n+1}+3a_n)$$

と変形できます．(i) 式から $\{a_{n+1}+3a_n\}$ は公比 -3 の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1}+3a_n=(-3)^n(a_1+3a_0) \tag{i}$$

となります．(i) 式の両辺を $(-3)^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}}-\frac{a_n}{(-3)^n}=-\frac{a_1+3a_0}{3}$$

が従いますが，これは $\{\frac{a_n}{(-3)^n}\}$ が公差 $-\frac{a_1+3a_0}{3}$ の等差数列であることを意味します．従って

$$\frac{a_n}{(-3)^n}=\frac{a_0}{(-3)^0}-\frac{(a_1+3a_0)n}{3}$$

から

$$\begin{aligned} a_n &= a_0(-3)^n+(-3)^{n-1}n(a_1+3a_0) \\ &= \alpha(-3)^n+(\beta+3\alpha)n(-3)^{n-1} \end{aligned}$$

であることが分かります．