

# 1 数列と差分方程式

## 1.1 差分方程式と数列の和

2019年4月10日演習問題解答

以下の差分方程式を解きましょう.

$$\begin{array}{lll}
 (1) \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2 \\ a_0 = \alpha \end{cases} & (2) \begin{cases} a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1 \\ a_0 = \alpha \end{cases} & (3) \begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0 \\ a_0 = \alpha, a_1 = \beta \end{cases} \\
 (4) \begin{cases} a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0 \\ a_0 = \alpha, a_1 = \beta \end{cases} & (5) \begin{cases} a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 0 \\ a_0 = \alpha, a_1 = \beta \end{cases} & (6) \begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n = 0 \\ a_0 = \alpha, a_1 = \beta \end{cases}
 \end{array}$$

解答

(1) 方程式  $\lambda = 3\lambda - 2$  を解くと  $\lambda = 1$  となるので

$$\begin{array}{r}
 a_{n+1} = 3a_n - 2 \quad \dots (i) \\
 -) \quad 1 = 3 \cdot 1 - 2 \quad \dots (ii) \\
 \hline
 a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1) \quad \dots (iii)
 \end{array}$$

を得ます. (iii) 式は  $\{a_n - 1\}$  が公比 3 の等比数列であることを意味しますから

$$a_n - 1 = 3^n(a_0 - 1) = 3^n(\alpha - 1) \quad \text{すなわち} \quad a_n = 3^n(\alpha - 1) + 1$$

であることが分かります.

(2) 方程式  $\lambda = -\frac{1}{2}\lambda + 1$  を解くと  $\lambda = \frac{2}{3}$  となるので

$$\begin{array}{r}
 a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1 \quad \dots (i) \\
 -) \quad \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \quad \dots (ii) \\
 \hline
 a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}(a_n - \frac{2}{3}) \quad \dots (iii)
 \end{array}$$

を得ます. (iii) 式は  $\{a_n - \frac{2}{3}\}$  が公比  $-\frac{1}{2}$  の等比数列であることを意味しますから

$$a_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_0 - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\alpha - \frac{2}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\alpha - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}$$

であることが分かります.

(3) 特性方程式  $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$  を解くと  $\lambda = -1, 2$  となりますから, 差分方程式は

$$a_{n+2} - (2 + (-1))a_{n+1} + (-1)2a_n = 0$$

とみることができます. これを

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = (-1)(a_{n+1} - 2a_n) & \dots (i) \\ a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) & \dots (ii) \end{cases}$$

と変形できます. (i) 式から  $\{a_{n+1} - 2a_n\}$  は公比  $(-1)$  の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} - 2a_n = (-1)^n(a_1 - 2a_0) \tag{iii}$$

となります。他方 (ii) 式から  $\{a_{n+1} + a_n\}$  は公比 2 の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} + a_n = 2^n(a_1 + a_0) \quad (\text{iv})$$

となります。(iv)-(iii) から

$$3a_n = 2^n(a_1 + a_0) - (-1)^n(a_1 - 2a_0)$$

従って

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n \frac{a_1 + a_0}{3} - (-1)^n \frac{a_1 - 2a_0}{3} \\ &= 2^n \frac{\beta + \alpha}{3} - (-1)^n \frac{\beta - 2\alpha}{3} \end{aligned}$$

であることが分かります。

(4) 特性方程式  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$  を解くと  $\lambda = 1, 3$  となりますから、差分方程式は

$$a_{n+2} - (1+3)a_{n+1} + 1 \cdot 3a_n = 0$$

とみることができます。これを

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) & \cdots (i) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = a_{n+1} - 3a_n & \cdots (ii) \end{cases}$$

と変形できます。(i) 式から  $\{a_{n+1} - a_n\}$  は公比 3 の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} - a_n = 3^n(a_1 - a_0) \quad (\text{iii})$$

となります。他方 (ii) 式から  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  は公比 1 の等比数列 (定数列) であることがわかりますから

$$a_{n+1} - 3a_n = a_1 - 3a_0 \quad (\text{iv})$$

となります。(iv)-(iii) から

$$2a_n = 3^n(a_1 - a_0) - (a_1 - 3a_0)$$

従って

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n \frac{a_1 - a_0}{2} - \frac{a_1 - 3a_0}{2} \\ &= 2^n \frac{\beta - \alpha}{2} - \frac{\beta - 3\alpha}{2} \end{aligned}$$

であることが分かります。

(5) 特性方程式  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$  を解くと  $\lambda = -3$  (重根) となりますから、差分方程式は

$$a_{n+2} - ((-3) + (-3))a_{n+1} + (-3) \cdot (-3)a_n = 0$$

とみることができます。これを

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} = (-3)(a_{n+1} + 3a_n)$$

と変形できます。(i) 式から  $\{a_{n+1} + 3a_n\}$  は公比  $-3$  の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} + 3a_n = (-3)^n(a_1 + 3a_0) \quad (\text{i})$$

となります. (i) 式の両辺を  $(-3)^{n+1}$  で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}} - \frac{a_n}{(-3)^n} = -\frac{a_1 + 3a_0}{3}$$

が従いますが, これは  $\{\frac{a_n}{(-3)^n}\}$  が公差  $-\frac{a_1+3a_0}{3}$  の等差数列であることを意味します. 従って

$$\frac{a_n}{(-3)^n} = \frac{a_0}{(-3)^0} - \frac{(a_1 + 3a_0)n}{3}$$

から

$$\begin{aligned} a_n &= a_0(-3)^n + (-3)^{n-1}n(a_1 + 3a_0) \\ &= \alpha(-3)^n + (\beta + 3\alpha)n(-3)^{n-1} \end{aligned}$$

であることが分かります.

(6) 特性方程式  $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$  を解くと  $\lambda = \frac{1}{2}$  (重根) となりますから, 差分方程式は

$$a_{n+2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)a_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a_n = 0$$

とみることができます. これを

$$a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n)$$

と変形できます. (i) 式から  $\{a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\}$  は公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列であることがわかりますから

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2^n}(a_1 - \frac{1}{2}a_0) \tag{i}$$

となります. (i) 式の両辺を  $\frac{1}{2^{n+1}}$  で割ると

$$2^{n+1}a_{n+1} - 2^n a_n = 2(a_1 - \frac{1}{2}a_0)$$

が従いますが, これは  $\{2^n a_n\}$  が公差  $2(a_1 - \frac{1}{2}a_0)$  の等差数列であることを意味します. 従って

$$2^n a_n = 2^0 a_0 + n \cdot 2(a_1 - \frac{1}{2}a_0)$$

から

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^{n-1}}(a_1 - \frac{1}{2}a_0) \\ &= \alpha \frac{1}{2^n} + (\beta - \frac{1}{2}\alpha) \frac{n}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

であることが分かります.