講義の最初に確認

Nobuyuki TOSE

April 10, 2019

1年　　2年

マクロ　　ミクロ

統計　　計量

　　経済史?

講義の枠組み

1変数

2変数.

1年

前期	後期
微分積分入門	$\boxed{\text{微分積分}}$
$\boxed{\text{線形代数}}$	線形代数続論

必修.

2年

前期	後期
経済数学 I	経済数学 II

近代経済学の **4** 本柱

- マクロ経済学
- ミクロ経済学
- 計量経済学 (統計的手法)
- 経済史

重要なツールは線形代数.

その他

教科書 コアテキスト「経済数学」(戸瀬信之・新世社)

欠席 3回まで

小テスト 毎回小テストをする

意味のない答案 名前を書いて問題を写しただけの答案は欠席2回分とする

代返 代返は実行犯も同じペナルティーを受ける

演習問題 演習問題は毎回配布する．解答はwebに置く

webpage 講義のウエブページは「Nobuyuki Tose」で検索すると見つかる

電子メール nobutose(at)keio.jp ((at)を@にする) keio.jp以外のメールは読まない可能性がある．

差分方程式が定める数列

Nobuyuki TOSE

April ~~08~~, 2019
10

1, 2年の経済学は止まったまま (時間が入っていない)

数列・差分方程式

現時点 $t=0$ $n=1$ $n=2$ $n=3$ $\cdots$

数列 $n=0$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ T T T

- 一定時間ごとの時系列データや経済量のモデルを記述するために数列を用いる．
- その関係で，経済学部では初項を a_0 とすることが多い。

漸化式のことを差分方程式 (*difference equations*) と呼ぶが，時間を含むモデルの記述に用いることが多い．

注意 (1) 時系列=Time Series
(2) 一定時間には年次，半期，四半期，月次などがある．

差分方程式 (2)

例 (CT 7p)) intial condition

以下の差分方程式を満たす数列 $\{a_n\}$ を考えます．

$$a_0 = C \text{（初期条件）}, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

まず方程式 $\lambda = 3\lambda + 4$ を解くと $\lambda = -2$ を得ます．

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4 \quad \cdots (1) \\ -2 &= 3 \cdot (-2) + 4 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

n ステップ

において $(1) - (2)$ を考えると

$$a_0 + 2 \xrightarrow[\times 3]{} a_1 + 2 \xrightarrow[\times 3]{} a_2 + 2 \to \cdots \to a_n + 2 \quad \times 3$$

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$$

であることが分かります．これは $\{a_n + 2\}$ が公比 3 の等比数列であることを意味します．従って

$$a_n + 2 = 3^n(a_0 + 2) \quad \text{i.e.} \quad a_n = 3^n(C + 2) - 2$$

差分方程式 (2B)

$$a_{n+1} = 3a_n + 4 \longrightarrow \lambda = 3\lambda + 4$$

$$a_n = \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$a_0 = \lambda$

$a_1 = \lambda$

$a_2 = \lambda$

$\vdots$

定まる!

1 次方程式

$$\lambda = 3\lambda + 4$$

ですが，初期条件を無視して

$$a_n = \lambda \text{（一定）} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たす解を考えていることになります．

$$a_n = -2 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が特別な解.

差分方程式 (3)

例 (CT 13p)

差分方程式

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ a_0 = C_0,\ a_1 = C_1 & \text{(初期条件)} \end{cases}$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ を考えます．

$$\begin{aligned} n = 0\ & a_2 - 3a_1 + 2a_0 = 0 \longrightarrow a_2 = 3a_1 - 2a_0 \\ n = 1\ & a_3 - 3a_2 + 2a_1 = 0 \longrightarrow a_3 = 3a_2 - 2a_1 \\ n = 2\ & a_4 - 3a_3 + 2a_2 = 0 \longrightarrow a_4 = 3a_3 - 2a_2 \\ & \vdots \end{aligned}$$

から，a_0, a_1 を与えると，$a_2, a_3, a_4, \dots$ と定まっていきます．

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

差分方程式 (4)–特性方程式とは

方程式に対して特性方程式 characteristic equation

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

を考えます．これを解くと

$$\lambda = 1, 2$$

となります（特性根）．

初期条件を無視して $a_n = C\lambda^n$ の形 (等比数列) で解を求めます．

~~$n = 0\ n = 1 \quad n = 2\ n = 3 \quad \dots C\ C\lambda \quad C\lambda^2 C\lambda^3$~~ $\dots$

$n = 0$	C
$n = 1$	$C\lambda$
$n = 2$	$C\lambda^2$
$n = 3$	$C\lambda^3$
$\vdots$	$\vdots$

差分方程式に $a_n = C\lambda^n$ を代入すると

$$C\lambda^{n+2} - 3C\lambda^{n+1} + 2C\lambda^n = C\lambda^n(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

となりますから，$\lambda = 1$ または $\lambda = 2$ のとき，すなわち

$$a_n = C \text{ または } a_n = C \cdot 2^n$$

と 2 系統の解を見つけることができます（差分方程式の基本解）．

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

差分方程式 (5)–実際解いてみよう

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

特性方程式の解が $\lambda = 1, 2$ であることから

$$1 + 2 = 3, \quad 1 \cdot 2 = 2$$

従って方程式を

$$a_{n+2} - (1+2)a_{n+1} + 1 \cdot 2a_n = 0$$

と変形します．さらに 2 通りに

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} &= 2(a_{n+1} - a_n) \quad \dots (1) \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} &= a_{n+1} - 2a_n \quad \dots (2) \end{cases}$$

差分方程式 (6)–実際解いてみよう

(1) から

n ステップ

$$a_1 - a_0 \xrightarrow{\times 2} 2(a_1 - a_0) \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{\times 2} 2^n(a_1 - a_0) = a_{n+1} - a_n$$

と考えると

$$\cancel{a_{n+1}} - a_n = 2^n(a_1 - a_0) \tag{3}$$

(2) から

n ステップ

$$a_1 - 2a_0 \xrightarrow{=} \underset{a_2 - 2a_1}{a_1 - 2a_0} \xrightarrow{=} \dots \xrightarrow{=} \underset{a_{n+1} - 2a_n}{a_1 - 2a_0}$$

と考えると

$$\cancel{a_{n+1}} - 2a_n = a_1 - 2a_0 \tag{4}$$

(3)–(4) から

$$a_n = 2^n(a_1 - a_0) - (a_1 - 2a_0) = 2^n(C_1 - C_0) - (C_1 - 2C_0)$$

差分方程式 (7)–注意

注意

差分方程式

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

の解は 2 系統の解の定数倍の和として

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 1$$

として書ける．

2 階線型差分方程式

$p, q \in \mathbf{R}$ として，差分方程式

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

に対して特性方程式

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p \pm i\sqrt{4q - p}}{2}$

を考えます．

判別式 Discriminant

$D = p^2 - 4q > 0$ のとき　上の例と同様に，特性方程式の 2 根を α, β とすると $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq \beta$ となり，差分方程式の解は

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$\alpha = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$

$\bar{\alpha} = a - ib$

(A, B は n に依らない定数).

$D = p^2 - 4q < 0$ のとき 三角関数 sin, cos で解が記述できます．マクロ経済動学では重要になります．

$\alpha \notin \mathbb{R}$, $\alpha, \bar{\alpha}$

共役複素数．

CT 15,16p に解説有り． 37p 乗数モデル．

$D = 0$ のとき

差分方程式　$a_{n+2} - (2+2)\,a_{n+1} + 2\cdot 2\;a_n = 0$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (\lambda - 2)^2 = 0$$

です．差分方程式は $2 + 2 = 4$, $2 \cdot 2 = 4$ から

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2\,(a_{n+1} - 2a_n)$$

と変形できます．$\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は公比 2 の等比数列ですから

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n(a_1 - 2a_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

となります．この両辺を 2^{n+1} で割ると

$$a_1 - 2a_0 \xrightarrow{\times 2} a_2 - 2a_1 \xrightarrow{\times 2} a_3 - 2a_2 \xrightarrow{\times 2} \cdots \xrightarrow{\times 2} a_{n+1} - 2a_n$$

$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta_n$ ← 与えられている[illegible].

$D = 0$ のとき (2)

$$\frac{a_0}{1} \xrightarrow{+*} \frac{a_1}{2} \xrightarrow{+*} \frac{a_2}{2^2} \to \cdots \xrightarrow{+*} \frac{a_n}{2^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1 - 2a_0}{2} = *$$

従って $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ は公差 $\frac{a_1 - 2a_0}{2}$ の等差数列であることが分かります．

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_0}{2^0} + n\frac{a_1 - 2a_0}{2}$$

最後にこの両辺を 2^n 倍して

$$a_n = a_0 \cdot 2^n + (a_1 - 2a_0) \cdot n2^{n-1}$$

$D=0$ のとき

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$

$D=p^2-4q=0$ のとき 特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ の重根が α であるとき差分方程式の解は

$$a_n = A\cdot\alpha^n + B\cdot n\alpha^{n-1}$$

となります（A, B は n に依らない定数).