同次関数

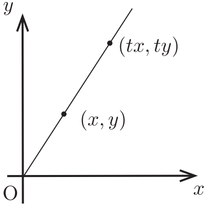
Nobuyuki TOSE

October 11, 2017
V03 October 16, 2019

同次関数–定義

$\mathbf{R}^2$ の第 1 象限

$$\mathbf{R}^2_{++} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x, y > 0\}$$



上で定義された関数

$$f:\ \mathbf{R}^2_{++} \to \quad \mathbf{R}$$

が与えられているとします.

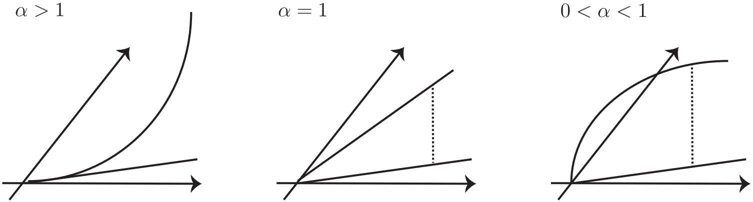
$$(x, y) \in \mathbf{R}^2_{++},\ \ t > 0 \quad \Rightarrow (tx, ty) \in \mathbf{R}^2_{++}$$

に注意しましょう. f が α 次の**同次関数(斉次関数)**であるとは

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2_{++}, t > 0)$$

が成立するときです.

同次関数 (2)



例 Cobb-Douglas 型関数

$$f(x,y) = Ax^{\alpha}y^{\beta} \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

を Cobb-Douglas 型関数と呼ぶ．生産関数，効用関数のモデルに用いることが多い．

$$(tx)^{\alpha}(ty)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}x^{\alpha}y^{\beta}$$

から Cobb-Douglas 型関数は $\alpha+\beta$ 次同次関数である．

Euler の等式

定理

$f: \mathbf{R}^2_{++} \to \mathbf{R}$ が α 次同次関数とする．このとき

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \alpha f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

が成立する．

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)$$

の両辺を t で微分すると

$$xf_x(tx,ty) + yf_y(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$$

となる．ここで $t = 1$ とすると

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \alpha f(x,y)$$

となる．

Euler の等式 (2)

定理

$f:\ \mathbf{R}^2_{++} \to \mathbf{R}$ が

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = \alpha f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2_{++})$$

を満たすならば，f は α 次同次関数となる．

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(t^{-\alpha} f(tx,ty)\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx,ty) + t^{-\alpha}\left(xf_x(tx,ty) + yf_y(tx,ty)\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx,ty) + t^{-\alpha} t^{-1}\left((tx)f_x(tx,ty) + (ty)f_y(tx,ty)\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx,ty) + t^{-\alpha-1} \cdot \alpha f(tx,ty) = 0
\end{aligned}$$

から従う．