2018 年 10 月 05 日　確認問題

I $O(2)$ を 2 次の直交行列の全体とします．すなわち

$$O(2) := \{P \in M_2(\mathbf{R});\ {}^tPP = P{}^tP = I_2\}$$

と定義します.

$$P_1, P_2 \in O(2) \Rightarrow P_1P_2 \in O(2),\ {}^tP_1 = P_1^{-1} \in O(2)$$

を示しましょう.

解答

$$ {}^t(P_1P_2)P_1P_2 = {}^tP_2({}^tP_1P_1)P_2 = {}^tP_2I_2P_2 = {}^tP_2P_2 = I_2$$

$$P_1P_2{}^t(P_1P_2) = P_1P_2{}^tP_2{}^tP_1 = P_1I_2{}^tP_1 = I_2$$

から P_1P_2 が直交であることが分かります．他方,

$$ {}^t({}^tP_1){}^tP_1 = P_1{}^tP_1 = I_2, \quad {}^tP_1{}^t({}^tP_1) = {}^tP_1P_1 = I_2$$

から ${}^tP_1$ が直交であることが分かります.

II $P \in M_2(\mathbf{R})$ が

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

を満たすならば

$$ {}^tPP = P{}^tP = I_2$$

が成立することを示しましょう.

解答　$(P\vec{v}, P\vec{w}) = ({}^tPP\vec{v}, \vec{w})$ が常に成立しますから仮定は

$$(({}^tPP - I_2)\vec{v}, \vec{w}) = 0 \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

と必要十分であることが分かります．さらに任意の $\vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に垂直なベクトルは $\vec{0}$ しかありませんから，この条件は

$$({}^tPP - I_2)\vec{v} = \vec{0} \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2)$$

と必要十分であることが分かります．任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ に対して $B\vec{v} = \vec{0}$ が成立する $B \in M_2(\mathbf{R})$ は $B = O_2$ しかありませんから，この条件は

$$ {}^tPP = I_2$$

と必要十分であることが分かります．このとき $|P| = \pm 1$ であることが従いますから，P は正則で $P^{-1} = {}^tP$, さらに $P{}^tP = I_2$ も成立します．以上で

$$ {}^tPP = P{}^tP = I_2$$

が成立することが分かりました.

III $P \in M_2(\mathbf{R})$ が

$$||P\vec{v}|| = ||\vec{v}|| \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2)$$

を満たすならば

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

が成立することを示しましょう.

解答　一般に $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{4}\left(||\vec{v} + \vec{w}||^2 - ||\vec{v} - \vec{w}||^2\right)$$

が成立することを用います. 実際

$$\begin{aligned} ||P\vec{v} + P\vec{w}||^2 &= ||P(\vec{v} + \vec{w})||^2 = ||\vec{v} + \vec{w}||^2 \\ ||P\vec{v} - P\vec{w}||^2 &= ||P(\vec{v} - \vec{w})||^2 = ||\vec{v} - \vec{w}||^2 \end{aligned}$$

が成立しますから

$$\begin{aligned} (P\vec{v}, P\vec{w}) &= \frac{1}{4}\left(||P\vec{v} + P\vec{w}||^2 - ||P\vec{v} - P\vec{w}||^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||\vec{v} + \vec{w}||^2 - ||\vec{v} - \vec{w}||^2\right) \\ &= (\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

となります.