演習問題

I 実 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||A|| := a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2$$

と定めます．(A の自乗ノルムと呼びます．)
(1) $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$||A\vec{x}|| \leq ||A|| \cdot ||\vec{x}||$$

を示しましょう．
(2) $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

を示しましょう．

II $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して A^n を求めましょう．

III
(1) $P_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とします．
(i) $P_{13}(\lambda)P_{13}(\mu)$ を計算しましょう．
(ii) $P_{13}(\lambda)$ が正則であることを示して $P_{13}(\lambda)^{-1}$ を求めましょう．
(2) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とします．
(i) Q^2 を計算しましょう．**(ii)** Q が正則であることを示して Q^{-1} を求めましょう．

IV $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ とします．
(1) A が正則ならば A^{-1} も正則であることを示しましょう．
(2) A, B が正則ならば積 AB も正則であることを示しましょう．

V

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{p} \\ 0 & \mathbf{q} \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{p} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & C \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \quad b_{13} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & D \end{pmatrix}$$

に対して以下を考えましょう.

(1) AB を計算しましょう.

(2) 　$a_{11} \neq 0$ かつ C が正則であるとき、A が正則であることを示しましょう.

VI $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めましょう. ただし行基本変形による掃き出し法は用いてはいけません.

I 実 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||A|| := a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2$$

と定めます．(A の自乗ノルムと呼びます．)
(1) $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$||A\vec{x}|| \leq ||A|| \cdot ||\vec{x}||$$

を示しましょう．
(2) $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

を示しましょう．

解答　**(1)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} ||A\vec{x}|| &= ||x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2|| \leq ||x_1\vec{a}_1|| + ||x_2\vec{a}_2|| \\ &= |x_1| \cdot ||\vec{a}_1|| + |x_2| \cdot ||\vec{a}_2|| \\ &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{||\vec{a}_1||^2 + ||\vec{a}_2||^2} = ||\vec{x}|| \cdot ||A|| \end{aligned}$$

(2) $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2)$ とすると $AB = (A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2)$ が成立しますから

$$\begin{aligned} ||AB||^2 &= ||A\vec{b}_1||^2 + ||A\vec{b}_2||^2 \\ &\leq ||A||^2 \cdot ||\vec{b}_1||^2 + ||A||^2 \cdot ||\vec{b}_2||^2 \\ &= ||A||^2 \cdot (||\vec{b}_1||^2 + ||\vec{b}_2||^2) = ||A||^2 \cdot ||B||^2 \end{aligned}$$

II $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して A^n を求めましょう．

解答

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & 3\alpha^2 \\ 0 & 1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & 3\alpha^2 \\ 0 & 1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 4\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5\alpha & 10\alpha^2 \\ 0 & 1 & 5\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

から

$$
A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & n\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.20}
$$

と予想されます．上の計算の途中で A^n の $(1,3)$ 成分の α^2 の係数が

$$
0,\ 0+1=1,\ 1+2=3,\ 3+3=6,\ 6+4=10, \cdots
$$

と階差が $1,2,3,4,\ldots$ の数列となっていることに注目するとこの予想を導くことができます．

数学的帰納法によって (5.20) を証明します．すなわち (5.20) の下で

$$
A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & n\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)\alpha & \frac{(n+1)n}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & (n+1)\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

から (5.20) が成立することが分かります．

解答 2

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

とすると

$$
J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = O_3
$$

が成立します．また $I_3 J = JI_3 = J$ も成立します．よって 2 項定理が $(I + \alpha J)^n$ に適用できて，$n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} A^n &= (I_3 + \alpha J)^n \\ &= I_3^n + {}_nC_1 I_3^{n-1} \cdot \alpha J + {}_nC_2 I_3^{n-2} \cdot \alpha^2 J^2 \\ &= I_3 + n\alpha J + \frac{n(n-1)^2}{\alpha} J^2 \end{aligned}$$

が導かれます．

参考 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ が可換とします．すなわち

$$AB = BA$$

が成立するとします．このとき

$$(A+B)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell C_k A^{\ell-k} B^k \tag{5.21}$$

を示しましょう．

証明　まず帰納法によって

$$BA^j = A^j B \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{5.22}$$

が成立することを示します．$j = 1$ のときは明かで、$BA^j = A^j B$ が成立するとすると

$$BA^{j+1} = B(A^j \cdot A) = (BA^j)A = (A^j B)A = A^j(BA) = A^j(AB) = (A^j A)B = A^{j+1}B$$

から、(5.25) が成立することが分りました．

次に (5.24) が成立すると仮定します．すると

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{\ell+1} &= (A+B)(A+B)^{\ell} \\
&= (A+B)\left(\sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^k\right) \\
&= A\sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^k + B\sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^k \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell+1-k}B^k + \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k BA^{\ell-k}B^k \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell+1-k}B^k + \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^{k+1} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell+1-k}B^k + \sum_{k=0}^{\ell-1} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^{k+1} + B^{\ell+1} \\
& \quad \text{（最初の和において } j=k\text{、次の和で } j=k+1 \text{ と変数変換）} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{\ell} {}_{\ell}C_j A^{\ell+1-j}B^j + \sum_{j=1}^{\ell} {}_{\ell}C_{j-1} A^{\ell+1-j}B^j + B^{\ell+1} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{\ell} \left({}_{\ell}C_j + {}_{\ell}C_{j-1}\right) A^{\ell+1-j}B^j + B^{\ell+1} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{\ell} {}_{\ell+1}C_j A^{\ell+1-j}B^j + B^{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell+1} {}_{\ell+1}C_j A^{\ell+1-j}B^j
\end{aligned}
$$

から

$$(A+B)^{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell+1} {}_{\ell+1}C_j A^{\ell+1-j}B^j$$

を示しました．

III

(1) $P_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とします.

(i) $P_{13}(\lambda)P_{13}(\mu)$ を計算しましょう.

(ii) $P_{13}(\lambda)$ が正則であることを示して $P_{13}(\lambda)^{-1}$ を求めましょう.

(2) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とします.

(i) Q^2 を計算しましょう. **(ii)** Q が正則であることを示して Q^{-1} を求めましょう.

解答 **(1)**

$$P_{13}(\lambda)P_{13}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{13}(\lambda+\mu)$$

となります. これを用いると $P_{13}(0) = I_3$ から

$$P_{13}(\lambda)P_{13}(-\lambda) = P_{13}(-\lambda)P_{13}(\lambda) = P_{13}(0) = I_3$$

から $P_{13}(\lambda)$ は正則で $P_{13}(\lambda)^{-1} = P_{13}(-\lambda)$ であることが分かります.

(2)

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

から Q は正則で $Q^{-1} = Q$ であることが分かります.

IV $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ とします.

(1) A が正則ならば A^{-1} も正則であることを示しましょう.

(2) A, B が正則ならば積 AB も正則であることを示しましょう.

解答 **(1)**

$$A^{-1}A = A^{-1} = I_n$$

から A は正則で $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ であることが分かります.

(2)

$$AB \cdot (B^{-1}A) = A(B^{-1}B)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})\cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

から AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることが分かります.

V

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{p} \\ 0 & \mathbf{q} \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{p} \\ 0 & \multirow{2}{*}{C} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & \vec{u} & \vec{v} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{D} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

に対して以下を考えましょう.

(1) AB を計算しましょう.

(2) 　$a_{11} \neq 0$ かつ C が正則であるとき、A が正則であることを示しましょう.

解答 **(1)**

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + \mathbf{p}\vec{u} & a_{11}b_{13} + \mathbf{p}\vec{v} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{CD} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

(2)

$$AB = I_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}b_{11} = 1,\ CD = I_2 \\ a_{11}b_{12} + \mathbf{p}\vec{u} = 0 \\ a_{11}b_{13} + \mathbf{p}\vec{v} = 0 \end{cases}$$

となることに注意すると，$a_{11} \neq 0$ で C が正則のとき

$$b_{11} = \frac{1}{a_{11}}, \quad b_{12} = -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{u}, \quad b_{13} = -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{v}, \quad D = C^{-1}$$

すなわち

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{u} & -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{v} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{C^{-1}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

と定めれば $AB = I_3$ が成立します．さらに

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{u} & -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{v} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C^{-1}}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot\frac{1}{a_{11}} & *_{12} & *_{13} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$C^{-1}C$}} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & *_{12} & *_{13} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{I_2}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

において

$$\begin{aligned} (*_{12}\ *_{13}) &= \frac{1}{a_{11}}(a_{12}\ a_{13}) - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}(\vec{u}\ \vec{v})C \\ &= \frac{1}{a_{11}}\mathbf{p} - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}C^{-1}C = \frac{1}{a_{11}}\mathbf{p} - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{p} = (0\ 0) \end{aligned}$$

となりますから $BA = I_3$ も成立します．

VI $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めましょう．ただし行基本変形による掃き出し法は用いてはいけません．

解答　$X = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $AX = I_3$ を満たす X を求めます．すなわち

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+2 & z+2y+3 \\ 0 & 1 & y-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$x + 2 = y - 2 = z + 2y + 3 = 0$$

すなわち

$$x = -2,\ y = 2, z = -7$$

であることが分かります．さらにこのとき

$$XA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

から $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$ であることが分かります．