確認問題

I $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とします．$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の

$$L(\vec{a}, \vec{b}) = \{s\vec{a} + t\vec{b} \in \mathbf{R}^3;\ s, t \in \mathbf{R}\}$$

への直交射影を $\vec{w}$ とするとき

$$\vec{w} = P\vec{v}$$

を満たす 3 次正方行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう．

II $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とします．$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影を $\vec{w}$ とするとき

$$\vec{w} = Q\vec{v}$$

を満たす 3 次正方行列 $Q \in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう．

III $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．$\vec{w}$ を $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ の $\vec{a}$ 方向の直交射影とします．このとき

$$\vec{q} = \vec{v} + 2(\vec{w} - \vec{v}) = 2\vec{w} - \vec{v}$$

に対して

$$\vec{q} = Q\vec{v}$$

を満たす行列 Q を求めましょう．さらに

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

のとき Q を求めましょう．

IV $A = (\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n)$, $B = (\vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_n)$ を $m \times n$ 行列とします．このとき

$$A\vec{v} = B\vec{v} \quad (\vec{v} \in \mathbf{K}^n)$$

ならば $A = B$ となることを示しましょう．

V　次の行列の計算をしましょう．

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & \alpha & p \\ b & \beta & q \\ c & \gamma & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$

VI　$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して次の計算をしましょう．

(1) $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (2) $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (3) $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (4) $A\begin{pmatrix}1\\0\\\lambda\end{pmatrix}$ (5) $A\begin{pmatrix}0\\\lambda\\0\end{pmatrix}$

VII　$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して次の計算をしましょう．

(1) $A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (2) $A\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (3) $A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

VIII　次の掛け算をしましょう．

$$\begin{pmatrix}a&d&e\\0&b&f\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&p&q\\0&y&r\\0&0&z\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x&0&0\\p&y&0\\r&q&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\d&b&0\\f&e&c\end{pmatrix}$$

IX　VII を参考にして次の行列の逆行列を求めましょう．ただし，C においては $\lambda \neq 0$ とします．

$$B = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

I $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とします．$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の

$$L(\vec{a}, \vec{b}) = \{s\vec{a} + t\vec{b} \in \mathbf{R}^3;\ s, t \in \mathbf{R}\}$$

への直交射影を $\vec{w}$ とするとき

$$\vec{w} = P\vec{v}$$

を満たす 3 次正方行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう．

解答　まず $\vec{a}$ の方向の単位ベクトルを

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と求めます．次に $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}_1$ を

$$\vec{w}_1 = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = -\frac{2}{5}\vec{a}$$

と求めます．すると $\vec{a}$ に垂直な

$$\vec{b} - \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

の方向の単位ベクトルを

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と定めます．このとき $\vec{v} = {}^t(x\ y\ z)$ の L への直交射影は

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= (\vec{v}, \vec{p}_1)\vec{p}_1 + (\vec{v}, \vec{p}_2)\vec{p}_2 \\
&= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-2x+y}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x+2y+5z}{30} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5x-2y+z \\ -2x+2y+2z \\ x+2y+5z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります．従って

$$P = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．

（補足） $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の V への直交射影 $\vec{v}_0$ を行列で表すことを考えましょう．
$\vec{\beta}\beta = \frac{1}{||\vec{\alpha}||}\vec{\alpha}$ とすると $\vec{x}$ の $\vec{\beta}$ 方向の直交射影 $\vec{v}_1$ は

$$\vec{v}_1 = \left(\vec{v}, \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta}^t \vec{\beta} \vec{v}$$

と表せます．このことから $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の L への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{\alpha} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \vec{v} - \vec{\beta}^t \vec{\beta} \vec{v} \\
&= \left(I_3 - \vec{\beta}^t \vec{\beta} \right) \vec{v} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \vec{v} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \vec{v}
\end{aligned}$$

と表されます.

また解答にある計算を用いると

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{p_1}{}^t\vec{p_1}\vec{v} + \vec{p_2}{}^t\vec{p_2}\vec{v} \\ &= (\vec{p_1}{}^t\vec{p_1} + \vec{p_2}{}^t\vec{p_2})\vec{v} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{30}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

としても求めることができます.

II $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ とします. $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影を $\vec{w}$ とするとき

$$\vec{w} = Q\vec{v}$$

を満たす 3 次正方行列 $Q \in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう.

解答

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a},\vec{v})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = \frac{1}{||\vec{a}||^2}\vec{a}\cdot{}^t\vec{a}\vec{v}$$

から

$$Q = \frac{1}{||\vec{a}||^2}\vec{a}\cdot{}^t\vec{a} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}(1\ 2\ -1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 4 & -2\\-1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

であることが分かります.

III $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．$\vec{w}$ を $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ の $\vec{a}$ 方向の直交射影とします．このとき

$$\vec{q} = \vec{v} + 2(\vec{w} - \vec{v}) = 2\vec{w} - \vec{v}$$

に対して

$$\vec{q} = Q\vec{v}$$

を満たす行列 Q を求めましょう．さらに

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

のとき Q を求めましょう．

解答　$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とします．このとき

$$\vec{w} = \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

と計算されます．従って

$$\begin{aligned}
\vec{q} &= 2\vec{w} - \vec{v} \\
&= x \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + y \cdot \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
&\qquad -x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \\ -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} & \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} & -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

から

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} & \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} & -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \end{pmatrix}$$

が分ります．さらに

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

とすると

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

となります．

IV $A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n)$, $B = (\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_n)$ を $m \times n$ 行列とします．このとき

$$A\vec{v} = B\vec{v} \quad (\vec{v} \in \mathbf{K}^n)$$

ならば $A = B$ となることを示しましょう．

解答　標準単位ベクトル $\vec{e}_j$ に対して

$$A\vec{e}_j = B\vec{e}_j \quad \text{から} \quad \vec{a}_j = \vec{b}_j$$

が従います．すべての列が等しいことを意味しますから $A = B$ であることが分かります．

V　次の行列の計算をしましょう．

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a & \alpha & p \\ b & \beta & q \\ c & \gamma & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$

解答

(1) $\begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x + 2y \\ 4x + 3y \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} ax + \alpha y + pz \\ bx + \beta y + qz \\ cx + \gamma y + rz \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} x + 2y - 3z + 4w \\ 4y - 6z + 7w \\ 2x + 4y - 6z + 8w \end{pmatrix}$

VI　$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して次の計算をしましょう．

(1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3) $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ (5) $A\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

解答　(1) $\vec{a}$　(2) $\vec{b}$　(3) $\vec{c}$　(4) $\vec{a} + \lambda\vec{c}$　(5) $\lambda\vec{b}$

VII　$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して次の計算をしましょう．

(1) $A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (2) $A\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ (3) $A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

解答　(1) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = A$　(2) $(\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a})$　(3) $(\vec{a}\ \lambda\vec{b}\vec{c})$

VIII　次の掛け算をしましょう．

$\begin{pmatrix}a & d & e\\ 0 & b & f\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & p & q\\ 0 & y & r\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}$,　$\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ p & y & 0\\ r & q & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ d & b & 0\\ f & e & c\end{pmatrix}$

解答

$$\begin{pmatrix}ax & ap+dy & aq+dr+ez\\ 0 & by & br+fz\\ 0 & 0 & cz\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}ax & 0 & 0\\ ap+dy & by & 0\\ ar+dq+fz & bq+ez & cz\end{pmatrix}$$

IX　VII を参考にして次の行列の逆行列を求めましょう．ただし，C においては $\lambda \neq 0$ とします．

$B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

注意　n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$ が正則であるとは

$$AX = XA = I_n$$

を満たす $X \in M_n(\mathbf{K})$ が存在するときです．このとき，この条件を満たす $X \in M_n(\mathbf{K})$ は一意的にです．すなわち，$X, Y \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$AX = XA = I_n,\ AY = YA = I_n \ \Rightarrow X = Y$$

が成立します．ですから，上の条件を満たす X を求めれば X が A の逆行列となります．

解答　**(1)**

$$B^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3$$

から B は正則で $B^{-1}=B$ であることが分かります.

(2)

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\mu\end{pmatrix}$$

であることが分かります. 従って

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=I_3$$

であることが分かります. 従って

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}$$

となります.

(3)

$$\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\mu\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\lambda+\mu\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

であることが分かります. 従って

$$\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

であることが分かります. 従って

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

となります.