2018 年 5 月 14 日演習問題

I 次の行列の逆行列を求めましょう.

(1) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(5)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(6)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **(7)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

解答

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ から

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

となります.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(7) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 5\cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

II 以下の計算をしましょう.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

解答 **(i)**

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

III 以下の等式を満たす 2 次正方行列 X を求めましょう.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ **(ii)** $X\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

解答 (i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0$ から $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ が正則であることが分かる．両辺に $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を左から掛けて

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

を得るが,

$$(\text{左辺}) = I_2 X = X$$

となるので

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

となる．

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2 \neq 0$ から $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ が正則であることが分かる．両辺に $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ を右から掛けて

$$X \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

を得るが,

$$(\text{左辺}) = X I_2 = X$$

となるので

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -17 & 11 \end{pmatrix}$$

となります．

IV 2 次正方行列 A, B が正則であるとします．このとき AB と A^{-1} が正則であることを示しましょう．

解答

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_2A^{-1} = AA^{-1} = I_2$$
$$B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_2B = B^{-1}B = I_2$$

から AB は正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

であることが分かります．

他方

$$A^{-1}A = I_2, \quad AA^{-1} = I_2$$

から A^{-1} は正則で

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

であることが分かります．

V 2 次正方行列 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$ が

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^2)$$

を満たすとします．このとき $A = O_2$ となることを示しましょう．

Hint: 標準単位ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\vec{x}$ として考えましょう．

解答

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}_1, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a}_2$$

から

$$A = (\vec{0}\ \vec{0}) = O_2$$

が従います．