

2018年5月7日演習問題

I 次の行列の積を計算しましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答

(1)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + \lambda y \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a} \lambda \vec{a} + \vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda \vec{a} \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b} \vec{a})$$

II  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$  とします. 以下を計算しましょう。

$$(1) (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (2) (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (3) (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (4) (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (5) (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(6) (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (7) (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (8) (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(9) (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (10) (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(11) (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (12) (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

解答

(1)

$$(\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{a}$$

(2)

$$(\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{b}$$

(3)

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{a}$$

(4)

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{b}$$

(5)

$$(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{c}$$

(6)

$$(\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} \quad 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \ \vec{b})$$

(7)

$$(\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} \quad 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \ \vec{a})$$

III 2 平面

$$\begin{cases} x - y - 2z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

の交わりの直線をパラメータ表示しましょう。

解答

$$\begin{cases} x - y = 2z - 1 \\ x + 2y = z + 1 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

から

$$x = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2z - 1 & -1 \\ z + 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(5z - 1), \quad y = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2z - 1 \\ 1 & z + 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(z - 2)$$

となる。よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5z - 1) \\ -\frac{1}{3}(z - 2) \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示されます。