# Lagrange の未定乗数法（その２）

戸瀬信之

December 19, 2018

# 制約条件付き極値問題

$U$ を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする．2 関数

$$f, g : U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとき

**問題**

$g(x, y) = 0$ の下で $z = f(x, y)$ を極大化（極小化）する

**定理**

$g(a,b)=0,\ g_y(a,b)\neq 0$ を満たす $(a,b)\in U$ において制約条件付き極値問題が極大値（極小値）をとるとします．このとき次の (L) を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．

$$\left\{\begin{array}{rcrcll} f_x(a,b) & + & \lambda g_x(a,b) & = & 0 & (1) \\ f_y(a,b) & + & \lambda g_y(a,b) & = & 0 & (2) \\ & & g(a,b) & = & 0 & (3) \end{array}\right. \tag{L}$$

ここで (1) と (2) を接線条件と呼びます．

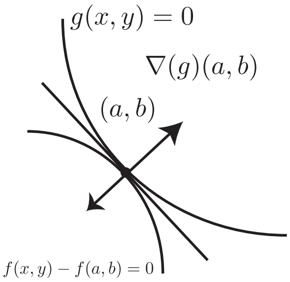
接線条件は

$$\boldsymbol{\nabla(f)(a,b) = -\lambda \cdot \nabla(g)(a,b)}$$

と表せます． $\boldsymbol{\nabla(f)(a,b)}$ は $\boldsymbol{f}$ の等高線

$$\boldsymbol{f(x,y) - f(a,b) = 0}$$

の $\boldsymbol{(a,b)}$ における法線ベクトルです．




2 曲線 $\boldsymbol{g(x,y) = 0}$ と $\boldsymbol{f(x,y) - f(a,b) = 0}$ は接線を共有しますから，接していることが分かります．

例 $I, p, q > 0$ とする．予算制約

$$g(x, y) = I - px - qy = 0 \quad (x, y > 0)$$

の下で効用関数

$$u(x, y) = \sqrt{xy}$$

を最大化する．この問題は第１財，第２財の価格が $p, q$ のときに，予算 $I$ をすべて支出して第１財を $x$, 第２財を $y$ 購入して効用を最大化するという問題である．

# 制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (2)

$(x, y)$ で極大・極小であるとすると

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} & + & \lambda(-p) & = & 0 & (1) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} & + & \lambda(-q) & = & 0 & (2) \\ & & I - px - qy & = & 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．$(1) \times x$, $(2) \times y$ を考えると

$$\sqrt{xy} = 2\lambda px = 2\lambda qy$$

であることが分かります．(1) を考えると $\lambda \neq 0$ であることが分かりますから

$$px = qy$$

さらに (3) から

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad \text{従って} \quad x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

# 制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (3)

$$x(p,q,I)=\frac{I}{2p},\quad y(p,q,I)=\frac{I}{2q}$$

を需要関数と呼びます．さらに (1) から Lagrange の未定乗数が

$$\lambda=\frac{1}{2p}\cdot\frac{\sqrt{\frac{I}{2q}}}{\sqrt{\frac{I}{2p}}}=\frac{1}{2\sqrt{pq}}$$

と求まります．この状況で $\lambda(p,q,I)$ を所得の限界効用と呼びます．

# 所得の限界効用

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), y(p,q,I)) = \sqrt{\frac{I}{2p}} \cdot \sqrt{\frac{I}{2q}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}$$

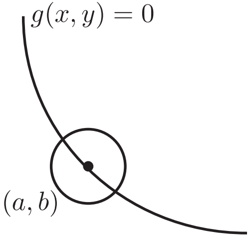
を間接効用関数と呼びます．このとき

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{pq}} = \lambda(p,q,I)$$

となります．これが $\lambda(p,q,I)$ が所得の限界効用と呼ばれる理由です．この等式

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

は一般的に成立します．




$$g(a,b)=0, \quad g_y(a,b)\neq 0$$

を仮定して, 陰関数定理を適用する. $(a,b)$ の近くで

$$y=\varphi(x)$$

と曲線 $g(x,y)=0$ を表す.

$(a,b)$ で極大（極小）ならば

$$F(t)=f(t,\varphi(t))$$

とすると $F'(a)=0$ が従う.

$$F''(a)>0 \quad (\text{resp.} \quad F''(a)<0$$

ならば $(a,b)$ で極小（resp. 極大）となります.

# 解法 (2)

Chain Rule を使うと

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$\begin{aligned}
F''(t) &= f_{xx}(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\
&\quad + \varphi'(t) \left( f_{yx}(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \right) \\
&\qquad + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \\
&= f_{xx}(t, \varphi(t)) + 2 f_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + f_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2 \\
&\qquad + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t)
\end{aligned}$$

# 解法 (3)

さらに $g(t,\varphi(t)) \equiv 0$ の両辺を $t$ で微分して

$$g_x(t,\varphi(t)) \cdot 1 + g_y(t,\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$$

$$g_{xx}(t,\varphi(t)) + 2g_{xy}(t,\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + g_{yy}(t,\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2$$
$$g_y(t,\varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \equiv 0$$

を得ます.

## 解法 (4)

$t = a$ とするとき $P_0(a, b)$ と定めて

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}$$

$$\varphi''(a) = -\frac{1}{g_y(a,b)}\left(g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + g_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2\right)$$

となります.

さらに

$$
\begin{aligned}
F''(a) &= f_{xx}(P_0) + 2f_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + f_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2 \\
&\qquad + f_y(P_0)\cdot\varphi''(a) \\
&= f_{xx}(P_0) + 2f_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + f_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2 \\
&\qquad - \frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)}\left(g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + g_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2\right) \\
&= L_{xx}(P_0,\lambda) + 2L_{xy}(P_0,\lambda)\cdot\varphi'(a) + L_{yy}(P_0,\lambda)\cdot\varphi'(a)^2
\end{aligned}
$$

が成立します．ここで

$$
\lambda = -\frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)}, \quad L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\cdot g(x,y)
$$

としました．

さらに

$$
\begin{aligned}
& F''(a) \\
&= L_{xx}(P_0, \lambda) + 2L_{xy}(P_0, \lambda) \cdot \left( -\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)} \right) + L_{yy}(P_0, \lambda) \cdot \left( -\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)} \right. \\
&= \frac{1}{g_y(P_0)^2} \Big( L_{xx}(P_0, \lambda) \cdot g_y(P_0)^2 - 2L_{xy}(P_0, \lambda) \cdot g_x(P_0) g_y(P_0) \\
&\qquad + L_{yy}(P_0, \lambda) \cdot g_x(P_0)^2 \Big) \\
&= -\frac{1}{g_y(P_0)^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & g_x(a, b) & g_y(a, b) \\ g_x(a, b) & L_{xx}(a, b, \lambda) & L_{xy}(a, b, \lambda) \\ g_y(a, b) & L_{yx}(a, b, \lambda) & L_{yy}(a, b, \lambda) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

定理

$$\begin{cases} f_x(a,b) & + & \lambda g_x(a,b) & = & 0 & (1) \\ f_y(a,b) & + & \lambda g_y(a,b) & = & 0 & (2) \\ & & g(a,b) & = & 0 & (3) \end{cases} \qquad \text{(L)}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在するとします．さらに

$$B(a,b,\lambda) := \begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & L_{xx}(a,b,\lambda) & L_{xy}(a,b,\lambda) \\ g_y(a,b) & L_{yx}(a,b,\lambda) & L_{yy}(a,b,\lambda) \end{vmatrix}$$

に対して $B(a,b,\lambda) < 0$ ならば $(a,b)$ で極小となります．
$B(a,b,\lambda) > 0$ ならば $(a,b)$ で極大となります．ここで

$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

と定めています．

# $\varphi''(a)$

$$\begin{aligned}
\varphi''(a) &= -\frac{1}{g_y(a,b)}\left(g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0)\cdot\varphi'(a) + g_{yy}(P_0)\cdot\varphi'(a)^2\right) \\
&= -\frac{1}{g_y(a,b)^3}\Big(g_{xx}(P_0)\cdot g_y(P_0)^2 - 2g_{xy}(P_0)\cdot g_x(P_0)g_y(P_0) \\
&\qquad + g_{yy}(P_0)\cdot g_x(P_0)^2\Big) \\
&= \frac{1}{g_y(a,b)^3}\begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & g_{xx}(a,b) & g_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & g_{yx}(a,b) & g_{yy}(a,b) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$