偏微分

Nobuyuki TOSE

September 26, 2018

ミクロ経済学における基本的な問題

ミクロ経済学では最初に以下の基本的な問題を学びます.

- 生産理論 (Production Theory)
- 消費者理論 (Consumer Theory)

生産理論（Production Theory）

生産物 (product)C が生産要素 (production elements) A,B から生産されるとします．A, B, C の価格はそれぞれ p, q, r とします．A と B をそれぞれ x と y 投入するとき C が $z = f(x, y)$ 得られるとします．
このとき $f(x, y)$ を生産関数 (production function) と呼ばれます．またこの状況で利潤関数 (profit function) を

$$\pi(x, y) = rf(x, y) - px - qy$$

と定義します．
生産理論の最初のステップは，利潤関数 $\pi(x, y)$ を最大化して生産要素需要関数

$$x = x(p, q, r), y = y(p, q, r)$$

を求めることにあります．

消費者理論（Consumer Theory）

商品 (Goods) A,B があるとします．A を x, B を y 購入するとき，消費者が効用関数 (utility function)$u(x, y)$ の効用を得るとします．さらに A, B の価格が p, q であるとします．
消費者が予算 I を全額消費して A,B を購入するとします．ここでの問題は予算制約と呼ばれる制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で $u(x, y)$ を最大化して需要関数 (demand function)

$$x = x(p, q, I), y = y(p, q, I)$$

と所得の限界効用 (mariginal utility of income)

$$\lambda = \lambda(p, q, I)$$

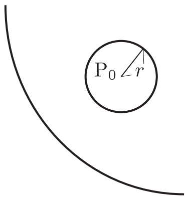
を得ることです．

Definition

$\mathbf{R}^2$ の部分集合 U があるとします．U が開集合であるとは任意の $\mathbf{P_0} \in U$ に対して $r > 0$ が存在して

$$B_r(\mathbf{P_0}) := \{\mathbf{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathbf{P}, \mathbf{P_0}) < r\} \subset U$$

が成立することです．ここで $d(\mathbf{P}, \mathbf{P_0})$ は $\mathbf{P}$ と $\mathbf{P_0}$ の距離で，$B_r(\mathbf{P_0})$ は中心 $\mathbf{P_0}$，半径 $r > 0$ の開円盤と呼びます．



開集合の例

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合です.

- $\mathbf{R}^2$
- 上半平面
$$\boldsymbol{U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y > 0\}}$$
- 第 1 象限（1st Quadrant）
$$\boldsymbol{\mathbf{R}^2_{++} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x, y > 0\}}$$
- 開円盤
$$\boldsymbol{B_r(\mathrm{P}_0) := \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) < r\}}$$

以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合は開集合ではありません.

- $\mathbf{P_0} \in \mathbf{R}^2$ のなす集合 $\{\mathbf{P_0}\}$
- 閉上半平面
$$F_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq 0\}$$
- 閉上半平面
$$\overline{\mathbf{R}^2_{++}} := \{(x, y)\mathbf{R}^2;\ x, y \geq 0\}$$
- 閉円盤
$$\overline{B_r(\mathbf{P_0})} := \{\mathbf{P} \in \mathbf{R}^2;\ d(\mathbf{P}, \mathbf{P_0}) \leq r\}$$

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

が定義されているとします.

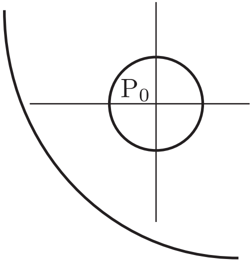
$P_0(a,b) \in U$ に対して x の関数

$$F(x) := f(x,b)$$

を $x = a$ の近くで定義できます．さらに y の関数

$$G(y) := f(a,y)$$

を $y = b$ の近くで定義することができます.



この状況で，定義の中の極限が存在すれば，x と y に関する偏微分係数を

$$f_x(a,b) := F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,a) - f(a,b)}{x-a}$$

$$f_y(a,b) := G'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b}$$

と定義できます.

Partial Differentiation-An example

$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$$

について考えます．$(a,b) \in \mathbf{R}^2$ の周りで考えるとして

$F(x) := f(x,b) = x^3+2xb^2+b^3$, and $G(y) := f(a,y) = a^3+2ay^2+$

と定義します．このとき

$$F'(x) = 3x^2 + 2b^2, \quad \text{and} \quad G'(y) = 4ay + 3y^2$$

から

$$f_x(a,b) = 3a^2 + 2b^2, \quad f_y(a,b) = 4ab + 3b^2$$

を得ます．

Review

微分可能な1変数関数の極小点（極大点）に関する次の定理を思い出しましょう．

Theorem

微分可能な関数 $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ があるとします． f が $c \in]a, b[$ で極小（極大）ならば

$$f'(c) = 0$$

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数
$$f:\ U \to \mathbf{R}$$
に対して，f が $\mathrm{P}_0(a,b)$ で極小（resp. 極大）であるとはある $\delta > 0$ が存在して
$$f(x,y) \geq f(a,b) \quad ((x,y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$
(resp.
$$f(x,y) \leq f(a,b) \quad ((x,y) \in B_\delta(\mathrm{P}_0))$$
)
が成立するときです.

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f: U \to \mathbf{R}$$

が U の各点 $\mathrm{P} \in U$ で x, y について偏微分できると仮定します.

Theorem

f が $\mathrm{P}_0(a, b) \in U$ で極小（極大）ならば

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \tag{1}$$

が成立します.

この状況で (1) を満たす点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ を f の停留点と呼びます.

Minimal (Maximal) Points–Sketch of proof

f が $\mathbf{P_0}$ で極小とします．このとき

$$F(x) = f(x, b)$$

は $x = a$ で極小となります．このとき

$$F'(a) = 0 \quad 従って \quad f_x(a, b) = 0$$

となります.

Minimal (Maximal) Points–An example

関数

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$$

について考えます.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x + 4y \cdot 1 + 0 - 6 - 0 \\ &= 2x + 4y - 6 = 0 \\ f_y(x,y) &= 0 + 4x \cdot 1 + 4y - 0 - 8 \\ &= 4x + 4y - 8 = 0 \end{aligned}$$

を解くと, $(x,y) = (1,1)$ が f の唯一の停留点であることが分かります.