

I 教科書第8章にある

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

によって  $\mathbf{K}^3$  を

$$\mathbf{K}^3 = V(-1) \oplus V(0) \oplus V(9)$$

とスペクトル分解します。任意の  $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$  に対してこの分解に応じて

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

と分解するとき

$$P_j \vec{v} = v_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

と  $P_j \in M_3(\mathbf{K})$  を用いて表されました。このとき

$$P_1 + P_2 + P_3 = I_3, \quad P_j^2 = P_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad P_i P_j = O_3 \quad (i \neq j)$$

が成立することを示しましょう。ただし固有方程式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

と因数分解されるときに C-H の定理によって

$$\Phi_A(A) = (A - \alpha_1 I_3)(A - \alpha_2 I_3)(A - \alpha_3 I_3) = O_3$$

が成立することは用いて構いません。また具体的に  $P_j$  を求めて示しましょう。

解答

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &:= \frac{(\lambda - 0)(\lambda - 9)}{(-1 - 0)(-1 - 9)} = \frac{1}{10}\lambda(\lambda - 9) \\ f_2(\lambda) &:= \frac{(\lambda - (-1))(\lambda - 9)}{(0 - (-1))(0 - 9)} = -\frac{1}{9}(\lambda + 1)(\lambda - 9) \\ f_3(\lambda) &:= \frac{(\lambda - (-1))(\lambda - 9)}{(9 - (-1))(9 - 0)} = -\frac{1}{9}(\lambda + 1)(\lambda - 9) \end{aligned}$$

と定義します。このとき

$$\begin{aligned} f_1(-1) &= 1, & f_1(0) &= 0, & f_1(9) &= 0 \\ f_2(-1) &= 0, & f_2(0) &= 1, & f_2(9) &= 0 \\ f_3(-1) &= 0, & f_3(0) &= 0, & f_3(9) &= 1 \end{aligned}$$

が成立します。一般に  $A \in M_3(\mathbf{K})$ ,  $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ ,  $\alpha \in \mathbf{K}$  が

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v}$$

を満たすならば,  $g(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$  に対して

$$g(A)\vec{v} = g(\alpha)\vec{v}$$

が成立します. そこで  $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$  に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(-1), \quad \vec{v}_2 \in V(0), \quad \vec{v}_3 \in V(3) \quad (1)$$

とスペクトル分解をすると

$$\begin{aligned} f_1(A)\vec{v} &= f_1(A)\vec{v}_1 + f_1(A)\vec{v}_2 + f_1(A)\vec{v}_3 \\ f_2(A)\vec{v} &= f_2(A)\vec{v}_1 + f_2(A)\vec{v}_2 + f_2(A)\vec{v}_3 \\ f_3(A)\vec{v} &= f_3(A)\vec{v}_1 + f_3(A)\vec{v}_2 + f_3(A)\vec{v}_3 \end{aligned}$$

が成立しますから

$$P_1 = f_1(A), \quad P_2 = f_2(A), \quad P_3 = f_3(A)$$

であることが分かります.

次に

$$f_1(\lambda) + f_2(\lambda) + f_3(\lambda) = 1$$

が恒等的に成立することに注意します. 両辺が 2 次式以下で  $\lambda = -1, 0, 9$  で成立するからです. これから

$$P_1 + P_2 + P_3 = I_3 \quad (2)$$

が従います. (??) 自体は分解 (1) に

$$\vec{v}_1 = P_1\vec{v}, \quad \vec{v}_2 = P_2\vec{v}, \quad \vec{v}_3 = P_3\vec{v}$$

を代入して

$$\vec{v} = P_1\vec{v} + P_2\vec{v} + P_3\vec{v} = (P_1 + P_2 + P_3)\vec{v}$$

を導いて示すこともできます. 次に

$$P_i P_j = O_3 \quad (i \neq j) \quad (3)$$

が成立することを  $P_1 P_2 = O_3$  で示しましょう.

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda) = -\frac{1}{90}(\lambda+1)\lambda(\lambda-9)^2 = -\frac{1}{90}(\lambda-9)\Phi_A(\lambda)$$

となりますから

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 = -\frac{1}{90}(A - 9I_3)\Phi_A(A) = -\frac{1}{90}(A - 9I_3)O_3 = O_3$$

が従います. ここで Cayley-Hamilton の定理

$$\Phi_A(A) = (A + I_3)A(A - 9I_3) = O_3$$

が成立することを用いました. 次に

$$P_i^2 = P_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

を示します.  $i = 1$  のとき

$$P_1 = P_1(P_1 + P_2 + P_3) = P_1^2 + P_1 P_2 + P_1 P_3 = P_1^2 + O_3 + O_3 = P_1^2$$

となりますが,  $i = 2, 3$  の場合も同様です.

補足 任意の  $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$  を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(-1), \vec{v}_2 \in V(0), \vec{v}_3 \in V(9)$$

とスペクトル分解します. このとき  $\vec{v}_1$  をスペクトル分解すると

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{0} + \vec{0}, \quad \vec{v}_1 \in V(-1), \vec{0} \in V(0), \vec{0} \in V(9)$$

となります.  $\vec{v}_1 = P_1 \vec{v}$ ,  $P_1 \vec{v}_1 = \vec{v}_1$ ,  $P_2 \vec{v}_1 = \vec{0}$  であることに注意すると

$$P_1^2 \vec{v}_1 = P_1 \vec{v}_1, \quad P_2 P_1 \vec{v} = \vec{0}$$

であることがわかりますから

$$P_1^2 = P_1, \quad P_1 P_2 = O_3$$

が従います.