II 次の 3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して固有値と固有ベクトルをすべて求めましょう．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(4)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

解答　(1)

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 \\ -5 & \lambda-6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-6)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 4, 6$ であることが分かります．

次に固有ベクトルを求めます．

(i) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#1}$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow y = z = 0$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

であることが分かります．

(ii) $\underline{\lambda = 4 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#2}$$

において

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{15} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#2) \Leftrightarrow x - \frac{11}{15}z = 0, \quad y + \frac{2}{5}z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{15}z \\ -\frac{2}{5}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15}z\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

(iii) $\underline{\lambda = 6 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5&-2&-3\\0&2&0\\0&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0} \tag{\#3}$$

において

$$\begin{pmatrix}5&-2&-3\\0&2&0\\0&-5&0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}5&0&-3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1)\Leftrightarrow 5x-3z=0, y=0$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}z\\0\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{5}z\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}\quad(z\neq 0)$$

であることが分かります.

注意　ここでさらに

$$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{p}_2=\begin{pmatrix}11\\-6\\15\end{pmatrix},\ \vec{p}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix},\quad P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned}AP&=(A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3)=(1\cdot\vec{p}_1\ 4\cdot\vec{p}_2\ 6\cdot\vec{p}_3)\\&=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

と A が対角化されます.

(2)

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ 0 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1-\lambda\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ 0 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ 0 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0\\ -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

から A の固有値は $\lambda=-1,1,2$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda=-1\text{ のとき}}$行列式の計算における行基本変形を用いると

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0} \qquad (\#1)$$

であることが分かります. さらに

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1)\Leftrightarrow x=z,\ y=0$$

となります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\0\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(z\neq 0)$$

であることが分かります.

(ii) $\underline{\lambda=1\text{ のとき}}$ 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0} \qquad (\#2)$$

において

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#2)\Leftrightarrow x-3z=0,\quad y-2z=0$$

となります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3z\\2z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\quad(z\neq 0)$$

であることが分かります.

(iii) $\underline{\lambda = 2 \text{ のとき}}$ 固有多項式を求めるために用いた行基本変形を用いると

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#3}$$

において

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & -1 & 3\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, y = 3z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\3z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

注意　ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned}AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (-1\cdot\vec{p}_1\ 1\cdot\vec{p}_2\ 2\cdot\vec{p}_3)\\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

と A が対角化されます.

(3)

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2
\end{aligned}
$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$(重根) であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$行列式の計算における行基本変形を用いると

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#1}
$$

であることが分かりますから

$$
(\#1) \Leftrightarrow x = 2z,\ y = -z
$$

となります. これから固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)
$$

であることが分かります.

(ii) $\underline{\lambda = 3 \text{ のとき}}$ 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & & \\ 0 & 0 & 01 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y - z = 0 \tag{\#2}
$$

となります. これから固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)
$$

であることが分かります.

注意　ここでさらに

$$
\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)
$$

と定めます. 一般論によって

$$
V(1) \oplus V(3)
$$

が成立しますから, $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ とすると

$$
c_1\vec{p}_1 = \vec{0},\ c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}
$$

となります．$\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ であることが分かります．

$$c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_2 = c_3 = 0$ が従います．よって P は正則となります．

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (1 \cdot \vec{p}_1\ 3 \cdot \vec{p}_2\ 3 \cdot \vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と A が対角化されます．

(4)

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-4) - 4(\lambda-4) - 4(\lambda-2) \\ &= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-4) - 8(\lambda-3) \\ &= \lambda(\lambda-3)(\lambda-6)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 0, 3, 6$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = 0 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#1}$$

を解きます.

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = -2z,\ y = 2z$$

となります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

(ii) $\underline{\lambda = 3 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#2}$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#2) \Leftrightarrow x + \frac{1}{2}z = 0, \quad y + z = 0$$

となります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

(iii) $\underline{\lambda = 6 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-2 & 4 & 0\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#2)$$

において

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-2 & 4 & 0\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, y = \frac{1}{2}z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}z\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります.

注意　ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned}AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (0\cdot\vec{p}_1\ 3\cdot\vec{p}_2\ 6\cdot\vec{p}_3)\\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

と A が対角化されます.

補足　${}^tA = A$ すなわち A が対称であることから

$$\vec{p}_i \perp \vec{p}_j \quad (i \neq j)$$

が成立します．ここで

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix},\ \vec{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$$

とすると

$$(\vec{q}_i, \vec{q}_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad ||\vec{q}_i||^2 = 1\ (i = 1, 2, 3)$$

から Q は直交行列であることが分かります．このとき P と同様に

$${}^tQAQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

と対角化できます．そして

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

と直交座標変換を用いると，${}^tQ$ も直交であることから

$$\begin{aligned}
\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \left({}^tQA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tQ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\
&= \left({}^tQAQ \cdot {}^tQ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tQ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right) \\
&= 3\eta^2 + 6\zeta^2
\end{aligned}$$

となります．