2017 年 10 月 20 日確認問題解答

I $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ に対して固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ を求めて、すべての固有値に対して固有ベクトルを求めよ。

解答

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ -1 & -\lambda-2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda+2)(\lambda^2-2) = (\lambda+2)(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$$

から A の固有値は $\lambda = -2, \pm\sqrt{2}$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = -2 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (\# 1)$$

において

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = 0, y + z = 0$$

であることが分かります. これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります.

(ii) $\underline{\lambda = \sqrt{2} \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}+1 & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (\# 2)$$

において $\mathrm{rank}(A-\sqrt{2}I_3)=2$ ですから

$$
\begin{aligned}
(\#2) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}+1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}
$$

が分かります．これから固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)
$$

であることが分かります．

(iii) $\underline{\lambda = -\sqrt{2}\ \text{のとき}}$　(ii) と同様に固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -\sqrt{2}+2 \\ -\sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)
$$

であることが分かります．