IV

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3-2a \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします。

(1) $\det(A)$ を計算しましょう．

(2) $\det(A) = 0$ と $\det(A) \neq 0$ で場合を分けて，連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{\beta}$$

に解が存在する条件を求めましょう．

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3-2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 2-2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 2-2a \end{vmatrix} = 2-2a = 2(1-a)$$

となります．

(2) $a \neq 1$ ならば A は正則ですから，$A\vec{x} = \vec{\beta}$ には一意的な解 $\vec{x} = A^{-1}\vec{\beta}$ が存在します．

さらに $\vec{a} = 1$ ならば

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2-b \\ 0 & 1 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-b-t \\ b-1 \\ t \end{pmatrix}$$

が存在ます．以上で a, b に依らず常に解が存在することが分かります．