第1章　古典論理，集合，写像

1.1　命題

命題とは真 (True) か偽 (False) がはっきりしている文のことである。

$$1 < 2$$

は真であり

$$1 > 2$$

は偽である。 P_1 と P_2 が命題であるとしよう。 P_1 かつ P_2 $(P_1 \wedge P_2)$ が真であるのは P_1 と P_2 の両方が真であるときである。このことを**真理表** (**真偽表**) (truth table) と呼ぶ次の表であらわす。

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P_1 または P_2 $(P_1 \vee P_2)$ が真であるのは P_1 と P_2 のどちらか少なくとも一方が真であるときである。このことを真理表では次のようになる。

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P_1 の**否定** $\neg(P_1)$ が真となるのは P_1 が偽であるときである。真理表では次のようになる。

P_1	$\neg(P_1)$
T	F
F	T

となる。

P_1 ならば P_2 $(P_1 \Rightarrow P_2)$ が偽であるのは P_1 が真であってかつ P_2 が偽であるときである。その他の場合は真である。真理表では

P_1	P_2	$P_1 \Longrightarrow P_2$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

となる。

P_1 と P_2 が**同値**であるという命題 $P_1 \Leftrightarrow P_2$ は P_1 と P_2 の真偽が一致するとき真になる。真理表では

P_1	P_2	$P_1 \Longleftrightarrow P_2$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

1.2　論理式，恒等式

命題 P_1, P_2, $\cdots$ を $\wedge$, $\vee$, $\neg(\cdot)$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ を用いて組み合わせてできる命題を**論理式**とよぶ。[1]例えば

$$L_1(P_1, P_2) := (P_1 \Longrightarrow P_2)$$
$$L_2(P_1, P_2) := (\neg(P_2) \Rightarrow \neg(P_1))$$
$$L_3(P_1, P_2) := (\neg(P_1) \vee P_2)$$

と定めよう。L_2 と L_3 の P_1, P_2 の真偽の取り方による真偽の値を計算しよう。まず L_2 である。

P_1	P_2	$\neg(P_1)$	$\neg(P_2)$	$\neg(P_2) \Longrightarrow \neg(P_1)$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

となる。次に L_3 の値は

P_1	P_2	$\neg(P_1)$	$\neg(P_1) \vee P_2$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

[1] $\wedge$, $\vee$, $\neg(\cdot)$, を使うだけでいいことが以下に示される。

となる。以上で $L_1(P_1, P_2)$, $L_2(P_1, P_2)$, $L_3(P_1, P_2)$ は常に同一の真偽値をとることがわかった。これをもって

$$L_1(P_1, P_2) \equiv L_2(P_1, P_2) \equiv L_3(P_1, P_2)$$

と記す。L_1, L_2, L_3 は**恒等式**であるという。

別の注意であるが，$P_1 \Rightarrow P_2$ に対して $\neg(P_2) \Rightarrow \neg(P_1)$ をその**対偶**とよぶ。

演習 1.1. 次の恒等式を示せ。

(1)

$$(P_1 \Leftrightarrow P_2) \equiv ((P_1 \Rightarrow P_2) \land (P_2 \Rightarrow P_1))$$

(2)

$$\neg(P_1 \land P_2) \equiv (\neg(P_1) \lor \neg(P_2))$$

(3)

$$\neg(P_1 \lor P_2) \equiv (\neg(P_1) \land \neg(P_2))$$

1.3　命題関数

X を集合としよう。$x \in X$ に依存する命題を**命題関数**とよぶ。例えば $X = \mathbb{R}$ のとき

$$P(x) := (x > 1)$$

$$Q(x) := (x \leq 1)$$

は $\mathbb{R}$ 上定まっている命題関数である。一般に $P(x)$ を X 上の命題関数としよう。このとき全ての $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題を

$$\forall x \in X \quad [P(x)]$$

と記す。

ある $x \in X$ に対して $P(x)$ が成立するという命題を

$$\exists x \in X \quad [P(x)]$$

と記す。[2]

大事な公式は

$$\neg\,(\forall x \in X \quad [P(x)]) \equiv (\exists x \in X \quad \neg\,(P(x))) \tag{1.1}$$

$$\neg\,(\exists x \in X \quad [P(x)]) \equiv (\forall x \in X \quad \neg\,(P(x))) \tag{1.2}$$

である。

[2] $\forall$ は all, any の A, $\exists$ は exist の E が由来である。

1.4　集合

1.4.1　包含関係

以下では集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ を考える．

1.

$$A = B \quad \Leftrightarrow A \subset B \quad \text{AND} \quad B \subset A$$

2.

$$\text{NOT}\,(A \subset B) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in A\,(x \in B)$$

注意

$$A \subset B \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x \in A\,(x \in B)$$

3.

$$A \subset B \quad \text{AND} \quad B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

3 を証明する前に

$$B \cap C \subset B, \quad B \cap C \subset C$$

は今後よく用いることに注意しましょう．
$(\Rightarrow)$ $A \subset B \cap C$, $B \cap C \subset B$ から $A \subset B$ が従います．同様に $A \subset B \cap C$, $B \cap C \subset C$ から $A \subset C$ が従います．
$(\Leftarrow)$ $\forall x \in A$ をとると，$x \in B$ かつ $x \in C$ が成立しているが，このとき $x \in B \cap C$ が従う．以上で $A \subset B \cap C$ が導かれた．

4.

$$A \subset C \quad \text{AND} \quad B \subset C \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B \subset C$$

3 を証明する前に

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B$$

が常に成立することに注意しましょう．
$(\Rightarrow)$ $A \subset A \cup B$, $A \cup B \subset C$ から $A \cup C$ が従います．同様に $B \subset A \cup B$, $A \cup B \subset C$ から $B \cup C$ が従います．
$(\Leftarrow)$

$$\forall x \in A \quad \text{に対して} \quad x \in C$$

$$\forall x \in B \quad \text{に対して} \quad x \in C$$

が成立するとします．このとき $x \in A \cup B$ が成立しているとします．すると

$$x \in A \quad \text{OR} \quad x \in B$$

が従います．$x \in A$ ならば $x \in C$, $x \in B$ ならば $x \in C$ となりますから，$x \in C$ であることが分かります．これは

$$A \cup B \subset C$$

が成立することを意味します.

5. （分配法則）

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{1}$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{2}$$

(1) を示します.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow\ x \in A \cap B \quad \text{OR} \quad x \in C \\ &\Leftrightarrow\ (x \in A \quad \text{AND} \quad x \in B) \quad \text{OR} \quad x \in C \\ &\Leftrightarrow\ (x \in A \quad \text{OR} \quad x \in C) \quad \text{AND} \quad (x \in B \quad \text{OR} \quad x \in C) \\ &\Leftrightarrow\ x \in A \cup C \quad \text{AND} \quad x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow\ x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

演習 1.2. *(2)* を証明しましょう.

注意 上で (1) を示すために

$$(P \wedge Q) \vee R \ \equiv\ (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.3}$$

を用いました．また

$$(P \vee Q) \wedge R \ \equiv\ (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.4}$$

も成立します.

演習 1.3. (1.3), (1.4) を証明しましょう.

1.4.2　補集合

$A, B, C \subset X$ とします．このとき X の部分集合

$$A \setminus B := \{x \in X;\ x \in A \quad \text{AND} \quad x \notin B\}$$

を定義します.

1. （ド・モルガン則）

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \tag{1.5}$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cup C) \tag{1.6}$$

(1.5) を示します.

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{AND} \quad x \notin (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{AND} \quad \text{NOT}\,(x \in B \quad \text{OR} \quad x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{AND} \quad (x \notin B \quad \text{AND} \quad x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \quad \text{AND} \quad x \notin B) \quad \text{AND} \quad (x \in A \quad \text{AND} \quad x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \quad \text{AND} \quad x \in A \setminus C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

演習 1.4. (1.6) を示しましょう.

さらに

$$A^c := X \setminus A$$

と定義して A の**補集合**と呼びます．上の (1.5), (1.6) から次の (1.7), (1.8) が従います.

2.（ド・モルガン則）

$$(B \cup C)^c = B^c \cap C^c \tag{1.7}$$

$$(B \cap C)^c = B^c \cup C^c \tag{1.8}$$

1.4.3　積集合

X と Y, Z を集合とします．このとき

$$X \times Y := \{(x, y);\ x \in X,\ y \in Y\}$$

$$X \times Y \times Z := \{(x, y, z);\ x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z\}$$

を**積集合**と呼びます．例えば2次元列ベクトル全体の集合

$$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

に対して

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 := \{(\vec{x}, \vec{y});\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2\}$$

と 2 本の 2 次元列ベクトルの順列全体の集合が定まります．このとき

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

に注意しましょう．

3 次元列ベクトル全体の集合

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

に対して

$$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3 := \{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z});\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^3\}$$

と 3 本の 3 次元列ベクトルの順列全体の集合が定まります．

1.5　写像

X, Y 集合として写像

$$f:\ X \to Y$$

が与えられているとします．このとき X を**定義域**, Y を値域と呼びます．
注意 $f:\ X \to X$ を X 上の**変換**と呼びます．

1. （像，グラフ）$A \subset X$ に対して Y の部分集合

$$f(A) := \{f(a) \in Y;\ a \in A\}$$

を A の f による**像**と呼びます．

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y;\ x \in X\}$$

を f の**グラフ**と呼びます．

2. （合成）Z を集合として写像

$$g\colon\ Y \to Z$$

を考えます．このとき

$$g \circ f\colon\ X \to Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

を f と g の合成と呼びます.

3. （写像の合成に関する結合則）

さらに集合 W と写像

$$h\colon\ Z \to W$$

があるとき

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \qquad (1.9)$$

が成立します.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rrr, bend left=50, "h \circ (g \circ f)"] \arrow[rrr, bend right=50, "(h \circ g) \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & W \end{tikzcd}$$

演習 1.5. (1.9) を示しましょう.

4. （逆写像）写像 $f\colon\ X \to Y$ に対して

$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y \qquad (1.10)$$

を満たす g を f の**逆写像**と呼びます.

逆写像は存在すれば一意的に定まります．すなわち 2 つの写像

$$g_1\colon\ Y \to X, \quad g_2\colon\ Y \to X$$

が

$$g_1 \circ f = id_X,\ f \circ g_1 = id_Y,\ g_2 \circ f = id_X,\ f \circ g_2 = id_Y$$

を満たすならば $g_1 = g_2$ が成立します．実際

$$g_2 = id_X \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ id_Y = g_1$$

からこのことは証明できます．この一意性から f の逆写像を

$$f^{-1}\colon\ Y \to X$$

と記します.

5. （全射）写像 $f\colon X \to Y$ に対して

$$f(X) = Y$$

が成立するとき，すなわち

$$\forall y \in Y \text{ に対して} \exists x \in X \text{が存在して} f(x) = y$$

が成立するとき，f は**全射**であるといいます.

定理 1.1. ある写像 $g\colon Y \to X$ が

$$f \circ g = id_Y$$

を満たせば，f は全射となります.

証明 任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(g(y))$$

が成立しますから，f が全射であることが分かります.

6. （単射）写像 $f\colon X \to Y$ に対して

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

が成立するとき，f は**単射**であるといいます.

定理 1.2. ある写像 $g\colon Y \to X$ が

$$g \circ f = id_X$$

を満たせば，f は単射となります.

証明 $f(x) = f(x')$ とすると

$$g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

から

$$x = x'$$

が従います.

7. （全単射） 写像 $f\colon\ X \to Y$ が全射でかつ単射であるとき f を**全単射**と呼びます.

定理 1.1 と定理 1.2 から次の定理 1.3 が従います.

定理 1.3. $f : X \to Y$ に逆写像 $g\colon\ Y \to X$ が存在すれば f は全単射であることが従います.

定理 1.3 の逆が成立します.

定理 1.4. 写像 $f\colon\ X \to Y$ が全単射ならば，f には逆写像が存在します.

証明 逆写像 $g\colon\ Y \to X$ を構成します．f は全射ですから任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x)$$

を満たす $x \in X$ が存在します．しかもこの条件を満たす $x \in X$ はただ一つ存在します．実際 f は単射ですから

$$f(x) = f(x') \quad \text{から} \quad x = x'$$

が従うからです．この状況で

$$g(y) := x$$

と定義します．これから

$$y = f(g(y))$$

が成立することが分かります．さらに任意の $x \in X$ に対して $y = f(x)$ と定めると g の定義から $g(y) = x$ となりますが

$$g(f(x)) = x$$

が従います.

章末問題と解答

I 集合 X の部分集合 $A,B\subset X$ に対して以下を示しましょう。

$$\text{(i) } A\subset B \Leftrightarrow \text{(ii) } A=A\cap B \Leftrightarrow \text{(iii) } B=A\cup B \tag{1.11}$$

解答

<u>**(i)⇒(ii)**</u>

$$A\supset A\cap B$$

が常に成立しますから，$A\subset A\cap B$ を示せば $A=A\cap B$ を示すことができます．さらに $A\subset A$ かつ $A\subset B$ から

$$A\subset A\cap B$$

が従いますから[3]，(ii) が示せました．

<u>**(ii)⇒(i)**</u>

$$B\cap A\subset B$$

が常に成立しますから，$A=A\cap B\subset B$ から $A\subset B$ が従います．

<u>**(i)⇒(iii)**</u>

$$B\supset A\cup B$$

が常に成立しますから，$B\supset A\cup B$ を示せば $B=A\cup B$ が示せます．さらに $B\subset B$ かつ $A\subset B$ から $A\cup B\subset B$ が従いますから[4]，(iii) が示せました．

<u>**(iii)⇒(i)**</u>

$$A\subset A\cup B$$

が常に成立しますから

$$A\subset A\cup B=B$$

となりますから，$A\subset B$ が示せます．

II 集合 X の部分集合 $A,B,C\subset X$ に対して以下を示しましょう。

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C) \tag{1.12}$$

---

[3] $A,B,C\subset X$ のとき

$$A\subset B \quad \text{かつ} \quad A\subset C \quad \to A\subset B\cap C$$

が成立することを用いています．

[4] $A,B,C\subset X$ のとき

$$A\subset C \quad \text{かつ} \quad B\subset C \quad \to A\cup B\subset C$$

が成立することを用いています．

解答

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap x \in C) \vee (x \in A \cap x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)
\end{aligned}
$$

III 命題 P, Q, R に対して以下の合同式を示しましょう。

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.13}$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.14}$$

解答

P	Q	R	P∧Q	(P∧ Q)∨ R	P∨ R	Q∨ R	(P∨ R)∧(P∨R)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

この真理表から (P, Q, R) の 8 通りの真偽の組み合わせにおいて $(P \wedge Q) \vee R$ と $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ の真偽がすべて一致しているので，

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.15}$$

であることが分かります．

P	Q	R	P∨Q	(P∨ Q)∧ R	P∧ R	Q∧ R	(P∧ R)∨(P∧R)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

この真理表から (P, Q, R) の 8 通りの真偽の組み合わせにおいて $(P \vee Q) \wedge R$ と $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ の真偽がすべて一致しているので，

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.16}$$

であることが分かります．

IV 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう。

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{1.17}$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \tag{1.18}$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \tag{1.19}$$

解答

(1.17) について

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B \cap C \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

(1.18) について

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \setminus C \quad &\Leftrightarrow \quad x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C) \end{aligned}$$

ここで命題 P, Q, R に対して

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

が成立することを用いている[5]．

(1.19) について

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus C \quad &\Leftrightarrow \quad x \in (A \cup B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{aligned}$$

[5] この結果があるのでこの両辺にある命題を $P \wedge Q \wedge$ と記していいことが分かる．

V 写像 $f:\ X\to Y$ が与えられているとき，X の部分集合 $A,B\subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B) \tag{1.20}$$

$$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B) \tag{1.21}$$

解答
(1.20) について

$$\begin{aligned} y\in f(A\cup B) &\Leftrightarrow \exists x\in A\cup B\ y=f(x) \\ &\Leftrightarrow (\exists x\in A\ y=f(x))\vee(\exists x\in B\ y=f(x)) \\ &\Leftrightarrow y\in f(A)\vee y\in f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B) \end{aligned}$$

上で以下を用いていることに注意しましょう．

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ と X の部分集合 $A,B\subset X$ に対して

$$\exists x\in A\cup B\ \ (P(x))\equiv(\exists x\in A(P(x)))\vee(\exists x\in B(P(x)))$$

が成立します．

これがすぐ見えたら以下の説明は不要ですが，少し解説しましょう．
まず集合 X 上の命題関数 $P(x)$ と $Q(x)$ に対して

$$\exists x\in X\ \ (P(x)\vee Q(x))\equiv(\exists x\in X\ P(x))\vee(\exists x\in X\ Q(x))$$

が成立することに注意しましょう．また X の部分集合 A に対して

$$\exists x\in A\ P(x)\equiv\exists x\in X\ (x\in A\wedge P(x))$$

も成立します．これを用いると

$$\begin{aligned} \exists x\in A\cup B\ P(x) &\equiv \exists x\in X\ \ (x\in A\cup B\wedge P(x)) \\ &\equiv \exists x\in X\ \ ((x\in A\vee x\in B)\wedge P(x)) \\ &\equiv \exists x\in X\ \ ((x\in A\wedge P(x))\vee(x\in B\wedge P(x))) \\ &\equiv \exists x\in X\ \ (x\in A\wedge P(x))\vee\exists x\in X\ \ (x\in B\wedge P(x)) \\ &\equiv (\exists x\in A\ P(x))\vee(\exists x\in B\ P(x)) \end{aligned}$$

が導けます．
(1.21) について
まず以下の (1.22) を示します．

X の部分集合 $A_1, A_2 \subset X$ に対して

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2) \tag{1.22}$$

が成立します.

実際

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) &\Leftrightarrow \exists x \in A_1\ y = f(x) \\ &\underset{(*)}{\Rightarrow} \exists x \in A_2\ y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(A_2) \end{aligned}$$

と示せます. ここで (*) において以下を用いています.

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ が与えられているときに X の部分集合 A, B が $A \subset B$ を満たすならば

$$(\exists x \in A\ \ (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in B\ \ (P(x)))$$

が常に成立します.

最後に (1.21) を示します.

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$$

が常に成立しますから

$$f(A \cap B) \subset f(A), \quad f(A \cap B) \subset f(B)$$

が (1.22) を用いると導けます. これから

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

であることが従います.

VI 写像 $f\colon\ X \to Y$ と $g\colon\ Y \to Z$ が与えられているとき, 以下を示しましょう.
(1) f, g が全射ならば $g \circ f$ も全射となる。
(2) f, g が単射ならば $g \circ f$ も単射となる。
(3) $g \circ f$ が全射ならば g も全射となる。
(4) $g \circ f$ が単射ならば f も単射となる。

解答
(1) 任意の $z \in Z$ をとります. g が全射なので $\exists y \in Y$ が存在して

$$z = g(y)$$

が成立します．f が全射なので，この $y \in Y$ に対して $\exists x \in X$ が存在して

$$y = f(x)$$

が成立します．このとき

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

が成立します．よって $g \circ f$ は全射であることが分かります．
(2) $x, x' \in X$ に対して

$$g \circ f(x) = g \circ f(x') \quad \text{すなわち} \quad g(f(x)) = g(f(x'))$$

が成立するとします．g が単射なので

$$f(x) = f(x')$$

が成立します．さらに f が単射なので

$$x = x'$$

が従います．よって $g \circ f$ は単射であることが分かります．
(3) $g \circ f$ が全射なので $\forall z \in Z$ に対して $\exists x \in X$ が存在して

$$z = g \circ f(x) = g(f(x))$$

が成立します．ここで $f(x) \in Y$ なので g が全射であることが分かります．
(4) $x, x' \in X$ に対して $f(x) = f(x')$ が成立すると仮定します．このとき

$$g(f(x)) = g(f(x')) \quad \text{すなわち} \quad g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

が従います．ここで $g \circ f$ が単射であることを用いると

$$x = x'$$

となります．よって f は単射であることが示されました．