

2017 年 12 月 4 日「経済数学入門」演習問題

I I を $\mathbf{R}$ の開区間とします. $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ が凸関数であるとします. このとき $x_1, x_2, x_3 \in I$ が $x_1 < x_2 < x_3$ を満たすとき

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \stackrel{(**)}{\leq} \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

を証明しましょう. 最初の不等式 (*) は, x_2 を

$$x_2 = (1 - t)x_1 + tx_3$$

と $0 < t < 1$ を満たす t を用いて表すとき

$$f(x_2) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_3)$$

が成立することを用います.

解答 $x_2 = (1 - t)x_1 + tx_3$, $0 < 1 < t$ を満たす $t \in \mathbf{R}$ が存在します. このとき f が凸関数であることから

$$f(x_2) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_3)$$

が成立します. このとき

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\leq \frac{(1 - t)f(x_1) + tf(x_3) - f(x_1)}{(1 - t)x_1 + tx_3 - x_1} \\ &= \frac{t(f(x_3) - f(x_1))}{t(x_3 - x_1)} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \end{aligned}$$

が成立します. 他方

$$\begin{aligned} \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} &\geq \frac{f(x_3) - (1 - t)f(x_1) - tf(x_3)}{x_3 - (1 - t)x_1 - tx_3} \\ &= \frac{(1 - t)(f(x_3) - f(x_1))}{(1 - t)(x_3 - x_1)} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \end{aligned}$$

も成立します.

II (2) $p > 1$ のとき $f(t) := t^p$ が $I = (0, +\infty)$ 上で狭義の凸関数であることを示しましょう.

(2) $x, y > 0$, $x \neq y$, $0 < \alpha < 1$ のとき, 不等式

$$((1 - \alpha)x + \alpha y)^p \leq (1 - \alpha)x^p + \alpha y^p$$

が成立することを証明しましょう.

解答 (1) $f'(t) = pt^{p-1}$, $f''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$ が $t > 0$ に対して成立しますから, $f(t)$ は $I = (0, +\infty)$ 上狭義の凸関数であることが分かります.

(2) (1) から $0 < a < b$ のとき

$$((1-t)a + tb)^p < (1-t)a^p + tb^p \quad (0 < t < 1)$$

が成立します.

$X < y$ のとき $x = a, y = b, \alpha = 1 - t$ として

$$(\alpha x + (1 - \alpha)y)^p \leq \alpha x^p + (1 - \alpha)y^p$$

が従います.

$X > y$ のとき $x = b, y = a, \alpha = t$ として

$$(\alpha x + (1 - \alpha)y)^p \leq \alpha x^p + (1 - \alpha)y^p$$

が従います.

III $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ が凸関数とします.

$$U := \{(x, y); a < x < b, y > f(x)\}$$

が凸集合となることを示しましょう.

解答 $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in U$ とします. このとき

$$a < x_0, x_1 < b, \quad f(x_0) < y_0, \quad f(x_1) < y_1$$

が成立します. $0 < t < 1$ を満たす $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$x_t = (1 - t)x_0 + tx_1, \quad y_t = (1 - t)y_0 + ty_1$$

と定めて $P_t(x_t, y_t) \in U$ ($0 < t < 1$) を示します.

(i) $x_0 = x_1$ のとき $x_t = x_0$ となります. このとき

$$y_0 > f(x_0), \quad y_1 > f(x_1) = f(x_0)$$

が成立することから, $0 < t < 1$ のとき

$$y_t = (1 - t)y_0 + ty_1 > (1 - t)f(x_0) + tf(x_0) = f(x_0) = f(x_t)$$

から $P_t \in U$ が成立します.

(ii) $x_0 \neq x_1$ のとき $x_0 < x_1$ としても一般性は失いません. このとき f が凸関数であることから $0 < t < 1$ のとき

$$f(x_t) \leq (1 - t)f(x_0) + tf(x_1) < (1 - t)y_0 + ty_1 = y_t$$

から $P_t(x_t, y_t) \in U$ が成立します.

IV U_1, U_2 を $\mathbf{R}^2$ の凸集合とします. $U_1 \cap U_2$ が凸集合となることを証明しましょう.

解答

$$P \in U_1 \cap U_2 \quad \Leftrightarrow \quad P \in U_1 \quad \text{AND} \quad P \in U_2$$

に注意しましょう． $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1) \in U_1 \cap U_2$ とします． $0 < t < 1$ を満たす $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$x_t := (1-t)x_0 + tx_1, \quad y_t := (1-t)y_0 + ty_1$$

として P_t を定めます． $P_1, P_2 \in U_1$ で U_1 が凸集合であることから

$$P_t \in U_1 \quad (0 < t < 1)$$

が従います． さらに $P_1, P_2 \in U_2$ で U_2 が凸集合であることから

$$P_t \in U_2 \quad (0 < t < 1)$$

が従います． 以上から

$$P_t \in U_1 \cap U_2 \quad (0 < t < 1)$$

が分かりますから， $U_1 \cap U_2$ は凸集合です．