第 8 章

固有値問題—3 次元の場合

8.1 基本的な補助定理

値を $\mathbf{K}$ にとる $B \in M_3(\mathbf{K})$ を考えます．次の定理 8.1 が 3 次元の固有値問題を考える基礎となります．

定理 8.1. 次の条件 *(i), (ii), (iii)* は必要十分です．
(i) B は正則です．
(ii) $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)$ と B を列ベクトル表示すると，$\vec{b}_1$，$\vec{b}_2$，$\vec{b}_3$ は 1 次独立になります．すなわち

$$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_3\vec{b}_3 = \vec{0} \ \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \tag{8.1}$$

が成立します．
(iii) $\det(B) \neq 0$

Proof. **(i)⇒ (ii)** (8.1) は

$$B\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}$$

と必要十分であることに注意しましょう．**(i)** を仮定すると $B\vec{c} = \vec{0}$ の両辺に B^{-1} を掛けて $\vec{c} = B^{-1}B\vec{c} = B^{-1}\vec{0} = \vec{0}$ となり，**(ii)** が従います．
(i)⇒ (iii)

$$\det(B)\det(B^{-1}) = \det(BB^{-1}) = \det(I_3) = 1$$

から $\det(B) \neq 0$ が従います．

<u>**(iii)⇒ (i)**</u> $\tilde{B}$ を B の余因子行列とするとき

$$B\tilde{B} = \tilde{B}B = \det(B)I_3$$

が成立しますから，$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\tilde{B}$ と逆行列を求めることができます．
<u>**(ii)⇒ (iii)**</u> 対偶の **NOT(iii)⇒ NOT(iii)** を証明します．そのために，$\det(B) = 0$ を仮定します．B の列ベクトル表示 $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)$ において $\vec{b}_1 = 0$ が成立するならば，

$$(\vec{0}\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\vec{0} + 0\cdot\vec{b}_2 + 0\cdot\vec{b}_3 = \vec{0}$$

から **NOT (ii)** が成立します．以下では $\vec{b}_1 \neq \vec{0}$ とします．このとき有限回の行基本変形によって

$$B \to \cdots \to B_0 = \left(\begin{array}{c|cc} b_1' & b_2' & b_3' \\ \hline 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{21} & c_{22} \end{array}\right)$$

と変形できます．ただしここで $b_1' \neq 0$ となります．しかも $B\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow B_0\vec{v} = \vec{0}$ となり，ここで用いる行基本変形では行列式が 0 である性質は保たれますから

$$\det(B_0) = b_1'\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix} = 0$$

従って

$$\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix} = 0$$

となります．このことから，ある $\begin{pmatrix}y_0\\z_0\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が

$$\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\z_0\end{pmatrix} = \vec{0}$$

を満たします．ここで

$$x_0 = -\frac{1}{b_1'}(b_2'y_0 + b_3'z_0)$$

と定めると，$\vec{v}_0 = {}^t(x_0\ y_0\ z_0) \neq \vec{0}$ で

$$B_0\vec{v}_0 = \vec{0}$$

を満たします．これは $B\vec{v}_0 = \vec{0}$ を意味しますから，**NOT (ii)** を導きました． □

定理 8.1 の内容で次節以降で応用を展開しやすい形を系として掲げましょう.

系 8.1. $B \in M_3(\mathbf{K})$ に対して以下の **NOT(ii)** と **NOT(iii)** は必要十分です.
NOT(ii) ある $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して $B\vec{v} = \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0}$ が成立します.
NOT(iii)　$\det(B) = 0$

注意 8.1. 系 *8.1* において，$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ のとき，すなわち B が実数値のときには **NOT (ii)** で $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ と実数値の非自明解がとれることに注意しましょう

8.2　固有値・固有ベクトル

3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{K})$ を考えます．A の成分を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とします．ある $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ が存在して

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

が成立するとき，$\alpha \in \mathbf{K}$ は A の固有値であるといいます．そして $\vec{v}$ を固有値 α に対する固有ベクトルであるといいます.

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v} \Leftrightarrow (\alpha I_3 - A)\vec{v} = \vec{0}$$

であることに注意すると，$\alpha \in \mathbf{K}$ が A の固有値であることと

$$\det(\alpha I_3 - A) = 0$$

と必要十分であることが分かります（定理 8.1).

ここで A の固有多項式を

$$\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \tag{8.2}$$

と定めます．固有多項式を定める行列式を少し展開していきます．すなわち

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) + \sum_{\sigma \neq id} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} b_{\sigma(3)3}$$

とします．ここで $\lambda I_3 - A = (b_{ij})$ と成分を表しています．この式で $\sigma \neq id$ であるとします．もし

$$j = \sigma(i) \neq i$$

とすると

$$\sigma(j) \neq \sigma(i) = j$$

となりますから，ある i 列で σ が非対角成分を選ぶと別の j 列でも非対角成分が選ばれます．したがって，固有多項式の $\sum_{\sigma \neq id}$ の部分は λ に関して 1 次以下の多項式となることが分かります．以上から

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) + (\lambda\text{の 1 次式})$$

であることが導かれました．さらに (8.2) において $\lambda = 0$ とすると

$$\det(-\vec{a}_1 \ \ -\vec{a}_2 \ \ -\vec{a}_3) = -\det(A)$$

から

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A) \tag{8.3}$$

と表されます．ここで

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

と A のトレース（跡）を定義します．また演習 8.1 または演習 8.2 によると

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{8.4}$$

となる[*1]ことも分かります．

演習 8.1. $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3)$ と列ベクトル表示をするとき

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 \ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3|$$

において各列の線型性を用いて展開して (8.4) を示しましょう．

演習 8.2. $\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t)$ を 3 次元ベクトルに値をとる微分可能な関数とします．このとき

$$\frac{d}{dt}\left|\vec{a}(t) \ \vec{b}(t) \ \vec{c}(t)\right| = \left|\frac{d}{dt}\vec{a}(t) \ \vec{b}(t) \ \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t) \ \frac{d}{dt}\vec{b}(t) \ \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t) \ \vec{b}(t) \ \frac{d}{dt}\vec{c}(t)\right|$$

を示しましょう．これを用いて (8.4) を示しましょう．

[*1] ここに出てくる 2 次の小行列を 2 次の主小行列と呼びます．

8.3　対角可能な行列（十分条件）

8.3.1　行列の対角化

まず具体的な行列の固有値と固有ベクトルを求めて、その応用を考えていきます.

例 8.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ について考えましょう．A の固有多項式は

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 9)\lambda$$

ですから，固有値は $\lambda = -1,\ 0,\ 9$ となります．それぞれの固有値の固有ベクトルを求めましょう．

<u>$\lambda = -1$ のとき</u> 行基本変形

$$\begin{aligned}(-1)I_2 - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

から，$\lambda = -1$ に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は，

$$x + y = 0,\ z = 0$$

を満たします．特に

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は固有ベクトルとなります.

$\lambda = 0,\ 9$ のとき 同様に

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は，それぞれの場合の固有ベクトルとなります．ここで $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ と定めると[*2]

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

から P は正則であることが分かります．さらに

$$\begin{aligned} A(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (-\vec{p}_1\ 0 \cdot \vec{p}_2\ 9\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

が従います．[*3]

[*2] 実は，この状況で P が正則であることが一般的に証明されます（定理 8.2(215 ページ) を参照）．
[*3] 後にまとめますが，正方行列 A の固有方程式に重根がない場合，A は対角化可能です（定理 8.3）．

定理 8.2. $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．
(1) $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が相異なるとします．そして $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1, \quad \vec{v}_1 \neq \vec{0}$$

$$A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

を満たすとします．このとき $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ は 1 次独立になります．
(2) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が相異なるとします．そして $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1, \quad \vec{v}_1 \neq \vec{0}$$

$$A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

$$A\vec{v}_3 = \gamma\vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 \neq \vec{0}$$

を満たすとします．このとき $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ は 1 次独立になります．

Proof. **(1)**

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0} \tag{8.5}$$

が成立すると仮定します．この両辺に $(A - \alpha I_3)$ を掛けると

$$(A - \alpha I_3)\vec{v}_1 = \vec{0}, \quad (A - \alpha I_3)\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2 - \alpha\vec{v}_2 = (\beta - \alpha)\vec{v}_2$$

から

$$c_2(\beta - \alpha)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

が従います．$\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ から $c_2(\beta - \alpha) = 0$ を得ますが，$\beta \neq \alpha$ から $c_2 = 0$ となります．さらにこれを (8.5) に代入して得られる $c_1\vec{v}_1 = \vec{0}$ から $c_1 = 0$ も導けます．$\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ が仮定されているからです．
(2)

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0} \tag{8.6}$$

が成立すると仮定します．この両辺に $(A - \gamma I_3)$ を掛けると

$$c_1(\alpha - \gamma)\vec{v}_1 + c_2(\beta - \gamma)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

が従います．ここで **(1)** を用いると

$$c_1(\alpha - \gamma) = c_2(\beta - \gamma) = 0$$

となりますが，$\alpha-\gamma\neq 0$ と $\beta-\gamma\neq 0$ から $c_1=c_2=0$ が従います．さらにこれを (8.6) に代入すると $c_3\vec{v}_3=\vec{0}$ となりますが，$\vec{v}_3\neq\vec{0}$ から $c_3=0$ も従います． □

この定理 8.2 を用いると次の定理 8.3 に示すように，固有多項式が単純根しか持たないとき，行列が対角化できることが分かります．

定理 8.3. $A\in M_3(\mathbf{K})$ の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$$

が $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{K}$ と $\mathbf{K}$ に根を持ち，すべてが単純根であると仮定します．すなわち

$$\alpha\neq\beta,\ \beta\neq\gamma,\ \gamma\neq\alpha$$

が成立するとします．このとき正則な $P\in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

と A は対角化できます．

Proof. α,β,γ が A の固有値ですから対応する固有ベクトルが存在します．すなわち，$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in\mathbf{K}^3$ が存在して

$$A\vec{v}_1=\alpha\vec{v}_1,\ A\vec{v}_2=\alpha\vec{v}_2,\ A\vec{v}_3=\alpha\vec{v}_3$$
$$\vec{v}_i\neq\vec{0}\quad(i=1,2,3)$$

が成立します．$P=(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$ と定めると

$$\begin{aligned}AP&=(A\vec{v}_1\ A\vec{v}_2\ A\vec{v}_3)=(\alpha\vec{v}_1\ \beta\vec{v}_2\ \gamma\vec{v}_3)\\&=(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．ここで定理 8.2 を用いると P は正則であることが分かります．従って

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

と A は対角化できます． □

8.3.2　部分空間の和と直和

この 8.3.2 節は次の 8.3.3 節の準備です．

以下では V_1, V_2, V_3 は $\mathbf{K}^3$ の部分空間とします．このとき

$$V_1 + V_2 := \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2;\ \vec{v}_1 \in V_1,\ \vec{v}_2 \in V_2\}$$
$$V_1 + V_2 + V_3 := \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3;\ \vec{v}_1 \in V_1,\ \vec{v}_2 \in V_2,\ \vec{v}_3 \in V_3\}$$

と定めます．このとき $V_1 + V_2$，$V_1 + V_2 + V_3$ は $\mathbf{K}^3$ の部分空間となります．実際，$\vec{x}, \vec{y} \in V_1 + V_2$ とすると

$$\vec{v}_1, \vec{w}_1 \in V_1,\ \vec{v}_2, \vec{w}_2 \in V_2$$

が存在して

$$\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ \vec{y} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

と表せます．このとき

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \mu(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = (\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{w}_1) + (\lambda\vec{v}_2 + \mu\vec{w}_2)$$

において

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{w}_1 \in V_1,\ \lambda\vec{v}_2 + \mu\vec{w}_2 \in V_2$$

が成立しますから，$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V_1 + V_2$ が従います．以上から $V_1 + V_2$ が $\mathbf{K}^3$ の部分空間であることが示されました．$V_1 + V_2 + V_3$ については演習 8.3 にします．

演習 8.3. $V_1 + V_2 + V_3$ が $\mathbf{K}^3$ の部分空間であることを証明しましょう．

上で構成した部分空間 $V_1 + V_2$ は部分空間 V_1, V_2 の和，部分空間 $V_1 + V_2 + V_3$ は部分空間 V_1, V_2, V_3 の和と言います．さらに和が特別な性質を持つ場合が重要になります．すなわち

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}, \vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 0$$

が成立するとき $V_1 + V_2$ は直和であるといい $V_1 \oplus V_2$ と記します．さらに

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}, \vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2, \vec{v}_3 \in V_3 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = 0$$

が成立するとき $V_1 + V_2 + V_3$ は直和であるといい $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ と記します．この場合，$\vec{v} \in V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ が

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3$$
$$\vec{v}_i, \vec{w}_i \in V_i\ (i = 1, 2, 3)$$

と 2 通りに表されるとしたら

$$(\vec{v}_1 - \vec{w}_1) + (\vec{v}_2 - \vec{w}_2) + (\vec{v}_3 - \vec{w}_3) = \vec{0}$$

から

$$\vec{v}_1 = \vec{w}_1,\ \vec{v}_2 = \vec{w}_2,\ \vec{v}_3 = \vec{w}_3$$

が従います．要するに V_1, V_2, V_3 への分解が一意的になるということを意味します．実は固有ベクトルに関係して $\mathbf{K}^3$ の直和分解を構成できることを次の 8.3.3 節で説明します．

8.3.3　スペクトル分解

213 ページの例 8.1 の 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ に対して詳しく考察します．A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda + 1)\lambda(\lambda - 9)$$

で，固有値は $\lambda = -1, 0, 9$ でした．ここで

$$V(-1) := \ker(-I_3 - A),\ V(0) := \ker(A),\ V(9) = \ker(9I_3 - A)$$

と定めます．それぞれ固有値 $-1, 0, 9$ の固有空間と呼びます．このとき

$$\mathbf{K}^3 = V(-1) \oplus V(0) \oplus V(9) \tag{8.7}$$

が成立します．まず

$$\mathbf{K}^3 = V(-1) + V(0) + V(9)$$

であることを示します．すなわち，任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \tag{8.8}$$

を満たす $\vec{v}_1 \in V(-1),\ \vec{v}_2 \in V(0),\ \vec{v}_3 \in V(9)$ が存在することを示します．そのために A を対角化した行列

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

を用います．具体的には

$$V(-1) = \mathbf{K}\vec{p}_1,\ V(0) = \mathbf{K}\vec{p}_2,\ V(9) = \mathbf{K}\vec{p}_3$$

であることを用います．実際 c_1, c_2, c_3 を

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v}$$

によって定めると

$$\vec{v} = PP^{-1}\vec{v} = P\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3$$

から

$$\vec{v}_1 = c_1\vec{p}_1 \in V(-1),\ \vec{v}_2 = c_2\vec{p}_2 \in V(0),\ \vec{v}_3 = c_3\vec{p}_3 \in V(9)$$

と定めると (8.8) が従います．

次に $V(-1) + V(0) + V(9)$ が直和であることを示します．それは一般論をまとめた次の定理 8.4 から従います．

定理 8.4. $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．

(1) $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ は $\alpha \neq \beta$ を満たすとします．このとき $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{K}^3$ が

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1,\ A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2$$

を満たすならば

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$

が成立します．

(2) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ は $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$ を満たすとします．このとき $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{K}^3$ が

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1,\ A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2,\ A\vec{v}_3 = \gamma\vec{v}_3$$

を満たすならば

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{0}$$

が成立します．

Proof. **(1)** $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$ の両辺に $(A - \beta I_3)$ を掛けると

$$(\alpha - \beta)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

となりますが，$\alpha \neq \beta$ から $\vec{v}_1 = \vec{0}$ が従います．$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$ ですから $\vec{v}_2 = \vec{0}$ も従います．

(2) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$ の両辺に $(A - \gamma I_3)$ を掛けると

$$(\alpha - \gamma)\vec{v}_1 + (\beta - \gamma)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

となりますが $(\alpha - \gamma)\vec{v}_1, (\beta - \gamma)\vec{v}_2$ は **(1)** の条件を満たしますから

$$(\alpha - \gamma)\vec{v}_1 = (\beta - \gamma)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

から

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$

を得ます．さらに $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$ から $\vec{v}_3 = \vec{0}$ も成立します．

□

以上で例 8.1 で考えた対角化可能な 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ に対して (8.7) すなわち

$$\mathbf{K}^3 = V(-1) \oplus V(0) \oplus V(9) \tag{8.9}$$

を証明しました．これを A による $\mathbf{K}^3$ の**スペクトル分解**と呼びます．これについてさらに深めていきます．

任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

を満たす $\vec{v}_1 \in V(-1), \vec{v}_2 \in V(0), \vec{v}_3 \in V(9)$ が一意的に存在します．以下では $\vec{v}_i\ (i = 1, 2, 3)$ を具体的に求めることを考えます．

多項式

$$f(\lambda) := a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m \in \mathbf{K}[\lambda]$$

に対して

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mI_3$$

と定めます．これを $\vec{v}_1$ に掛けると $A^k\vec{v}_1 = (-1)^k\vec{v}_1$

$$\begin{aligned} f(A)\vec{v}_1 &= a_0(-1)^m\vec{v}_1 + a_1(-1)^{m-1}\vec{v}_1 + \cdots + a_1(-1)\vec{v}_1 + a_0\vec{v}_1 \\ &= \big(a_0(-1)^m + a_1(-1)^{m-1} + \cdots + a_1(-1) + a_0\big)\,\vec{v}_1 \\ &= f(-1)\vec{v}_1 \end{aligned}$$

から

$$f(A)\vec{v}_1 = f(-1)\vec{v}_1$$

を得ます．同様に

$$f(A)\vec{v}_2 = f(0)\vec{v}_2, \quad f(A)\vec{v}_3 = f(9)\vec{v}_3$$

も成立します．ここで

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda-9)}{(-1)(-1-9)} = \frac{1}{10}\lambda(\lambda-9)$$

とすると

$$f_1(-1) = 1, f_1(0) = f_1(9) = 0$$

から

$$P_1 = f_1(A) = \frac{1}{10}A(A-9I_3)$$

として $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ に掛けると

$$P_1\vec{v} = 1\cdot\vec{v}_1 + 0\cdot\vec{v}_2 + 0\cdot\vec{v}_3 = \vec{v}_1$$

から

$$\vec{v}_1 = P_1\vec{v}$$

となります．同様に

$$f_2(\lambda) = \frac{(\lambda+1)(\lambda-9)}{(0+1)(0-9)} = -\frac{1}{9}(\lambda+1)(\lambda-9)$$

$$f_3(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{9(9+1)} = \frac{1}{90}\lambda(\lambda+1)$$

を用いて

$$P_2 = f_2(A), \quad P_3 = f_3(A)$$

と定めると，

$$f_2(0) = 1,\ f_2(-1) = f_2(9) = 0$$

$$f_3(9)=1,\ f_3(-1)=f_3(0)=0$$

から

$$\vec{v}_2=P_2\vec{v},\quad \vec{v}_3=P_3\vec{v}$$

が成立します．さらに P_1,P_2,P_3 が満たす等式をいくつか証明します．

分解 $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$ から

$$\vec{v}=P_1\vec{v}+P_2\vec{v}+P_3\vec{v}=(P_1+P_2+P_3)\vec{v}$$

が任意の $\vec{v}\in\mathbf{K}^3$ に対して成立しますから

$$I_3=P_1+P_2+P_3$$

が成立します．$\vec{v}_1$ を分解すると

$$P_1\vec{v}_1=\vec{v}_1+\vec{0}+\vec{0}$$

ですから

$$P_1P_1\vec{v}=P_1\vec{v},\ P_2P_1\vec{v}=\vec{0},\ P_3P_1\vec{v}=\vec{0},$$

から

$$P_1^2=P_1,\ P_1P_2=O_3,P_1P_3=O_3$$

が従います．これと同様に

$$P_iP_j=\begin{cases}P_i & (i=j)\\ O_3 & (i\neq j)\end{cases}$$

が示されます．

注意 8.2. *次の定理 8.5 を用いると*

$$f_1(\lambda)+f_2(\lambda)+f_3(\lambda)=1$$

が恒等的に成立することが分かります．また，定理 8.7(Cayley-Hamilton の定理) を用いると

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda)=-\frac{1}{90}(\lambda+1)\lambda(\lambda-9)\cdot(\lambda-9)$$

から

$$P_1P_2=f_1(A)f_2(A)=-\frac{1}{90}\Phi_A(A)\cdot(A-9I_3)=O_3$$

のように $P_iP_j = O_3$ $(i \neq j)$ が従います．さらに

$$P_1 = P_1(P_1 + P_2 + P_3) = P_1^2 + P_1P_2 + P_1P_3 = P_1^2$$

と $P_i^2 = P_i$ $(i = 1, 2, 3)$ も証明できます.

定理 8.5. $\alpha_i \in \mathbf{K}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, m)$ はお互いに異なるとします．すなわち

$$\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$$

とします．$\mathbf{K}$ 係数の多項式

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

が

$$f(\alpha_0) = f(\alpha_1) = \cdots = f(\alpha_m) = 0$$

が成立するとき

$$f(\lambda) = 0$$

が恒等的に成立します.

8.4　行列の三角化，Cayley–Hamilton の定理

$A \in M_n(\mathbf{C})$ とします．特に以下では $n = 2, 3$ の場合を考えます．

定理 8.6. **(行列の三角化)** ある $P \in M_3(\mathbf{C})$ に対して

$$P^{-1}AP$$

が三角行列となります．

Proof. $\underline{n = 2 \text{ のとき}}$ に証明します．

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)$$

と固有多項式を 1 次式の積に分解します．固有値 α_1 に対応する固有ベクトルを $\vec{v}_1$ とします．

$$A\vec{v}_1 = \alpha_1 \vec{v}_1$$

この $\vec{v}_1$ を用いて $\mathbf{C}^2$ の基底を $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ と取って

$$P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2)$$

と定めます．このとき

$$A\vec{v}_2 = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2$$

と基底を用いて $A\vec{v}_2$ を表現できます．以上から

$$AP = (\alpha_1\vec{v}_1\ \ \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2) = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2)\begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

となります．ここで $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は基底なので 1 次独立であることに注意すると P は正則であることが分かります．以上で $n = 2$ の場合は証明できました．

$\underline{n = 3 \text{ のとき}}$ を次に証明しましょう．

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

と固有多項式を 1 次式の積に分解します．固有値 α_1 に対応する固有ベクトルを $\vec{v}_1$ とします．

$$A\vec{v}_1 = \alpha_1 \vec{v}_1$$

この $\vec{v}_1$ を用いて $\mathbf{C}^3$ の基底を $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，$\vec{v}_3$ と取って

$$P_1 = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$$

と置きます[*4]．このとき

$$A\vec{v}_2 = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \beta_3\vec{v}_3$$
$$A\vec{v}_3 = \gamma_1\vec{v}_1 + \gamma_2\vec{v}_2 + \gamma_3\vec{v}_3$$

と $\mathbf{C}^3$ の基底を用いて $A\vec{v}_2$，$A\vec{v}_3$ を表現すると

$$\begin{aligned} AP_1 &= (\alpha_1\vec{v}_1\ \ \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \beta_3\vec{v}_3\ \ \gamma_1\vec{v}_1 + \gamma_2\vec{v}_2 + \gamma_3\vec{v}_3) \\ &= (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)\begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = P_1\begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります．ここで

$$A_2 = \begin{pmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

と定めると 正則な $Q_2 \in M_2(\mathbf{C})$ が存在して

$$Q_2^{-1}A_2Q_2$$

が三角行列となります．さらに

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0\ \ 0 \\ 0 & \\ 0 & \raisebox{1ex}{Q_2} \end{pmatrix}$$

と定めると P_2 は正則で

$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0\ \ 0 \\ 0 & \\ 0 & \raisebox{1ex}{Q_2^{-1}} \end{pmatrix}$$

[*4] 例えば $\vec{v}_1 = {}^t(a\ b\ c)$ の第 1 成分が $a \neq 0$ を満たすとき

$$P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定めると P は正則となります．

が成立します．このとき

$$P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = P_2^{-1}\left(\begin{array}{ccc} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{A_2} \end{array}\right)P_2$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{Q_2^{-1}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{A_2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{Q_2} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} 1 & * & * \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{Q_2^{-1}A_2Q_2} \end{array}\right)$$

となります．最後に $P = P_1P_2$ と定めると $P^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}$ であり，

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc} 1 & * & * \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{Q_2^{-1}A_2Q_2} \end{array}\right)$$

において，右辺は三角行列です．

□

注意 8.3. $A \in M_3(\mathbf{C})$ が

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

と正則な $P \in M_3(\mathbf{C})$ によって三角化されたとします．このとき，

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-\alpha_1 & * & * \\ 0 & \lambda-\alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha_3 \end{pmatrix} = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)$$

から，三角化したときの対角成分は A の固有値が並ぶことが分かります．

注意 8.4. A が 3 次実正方行列であるとします．さらに A の固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が全て実数であるとします．このとき，正則な $P \in M_3(\mathbf{R})$ が存在して

$$P^{-1}AP$$

が三角行列となります．すなわち，実数値の行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ によって三角化できることになります．実際，例えば上の証明で $n = 3$ の場合を考えると α_1 に対応する固有ベクトル $\vec{v}_1$ は実ベクトルになり，$\vec{v}_2, \vec{v}_3$ が実ベクトルとして $\mathbf{R}^3$ の基底を定めます．そして A_2 の固有値は，上の注意 *8.3* にあるように α_2, α_3 であるからです．

行列の三角化の応用として **Cayley–Hamilton の定理**を与えます．その準備をまず行います．t の多項式

$$\varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_{m-1} t + a_m \in \mathbf{K}[t]$$

と n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\varphi(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_{m-1} A + a_m I_n$$

と定めます．

2 つの多項式 $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbf{K}[t]$ を考えます．

(i) $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ に対して

$$\varphi(A) = \varphi_1(A) + \varphi_2(A)$$

が成立します．

(ii) $\psi(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)$ に対して

$$\psi(A) = \varphi_1(A) \cdot \varphi_2(A)$$

が成立します．

さて以上の準備のもと次の定理を述べることができます．

定理 8.7. (Cayley-Hamilton の定理) 3 次正方行列 $A \in \mathbf{K}$ に対して

$$\Phi_A(A) = 0$$

が成立します．

Proof. 定理 8.6 によると正則な $P \in M_3(\mathbf{C})$ が存在して

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}$$

と三角化できます．このとき A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

と計算されます．さらに

$$\begin{aligned}
A-\alpha I_3 &= P\begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}P^{-1} - P\alpha I_3 P^{-1} \\
&= P\left\{\begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \alpha & * \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\right\}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \alpha-\beta & * \\ 0 & 0 & \alpha-\gamma \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

が成立します．同様に

$$A-\beta I_3 = P\begin{pmatrix} \alpha-\beta & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \gamma-\beta \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A-\gamma I_3 = P\begin{pmatrix} \alpha-\gamma & * & * \\ 0 & \beta-\gamma & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

となります．以上の準備のもとで

$$\begin{aligned}
\Phi_A(A) &= (A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)(A-\gamma I_3) \\
&= P^{-1}P(A-\alpha I_3)P^{-1}\cdot P(A-\beta I_3)P^{-1}\cdot P(A-\gamma I_3)P^{-1}P \\
&= P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \alpha-\beta & * \\ 0 & 0 & \alpha-\gamma \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \alpha-\beta & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \gamma-\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha-\gamma & * & * \\ 0 & \beta-\gamma & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P \\
&= P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha-\gamma & * & * \\ 0 & \beta-\gamma & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P \\
&= P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P = \boldsymbol{O}
\end{aligned}$$

と証明されます． □

8.5　対角化可能な行列–非単純な固有値がある場合

8.5.1　対角化可能な場合

$A \in M_3(\mathbf{K})$ が対角化可能であるとします．すなわち，ある正則行列 $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

が成立するとします．このとき

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha_3 \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

となります．このことから対角化できる場合は，対角成分に重複を含めて 3 個の固有値が並ぶことが分かります．

8.5.2　3 重根の場合

まず $A \in M_3(\mathbf{K})$ で固有多項式が $\alpha \in \mathbf{K}$ を 3 重根とする場合，すなわち

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$$

である場合を考えます．もし A が対角化可能であるとすると，ある正則行列 $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_3$$

から

$$A = \alpha I_3$$

であることが分かります．

8.5.3　2 重根の場合

8.5.4　具体例から始めよう

例 8.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ について考えます．A の固有多項式は

$$\Phi_A = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 & 4 \\ -4 & \lambda + 7 & 4 \\ 4 & -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2(\lambda - 1)$$

と計算されます．固有空間 $V(1)$ と $V(-3)$ の基底を求めましょう．

$\underline{V(1)\text{ について}}$　行基本変形

$$I_3 - A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

が分かりますので，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と固有空間 $V(1)$ のベクトルが表され，基底として

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れます．

$\underline{V(-3)\text{ について}}$　行基本変形

$$-3I_3 - A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-3) \Leftrightarrow x-y-z=0$$

が分かりますので，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と $V(-3)$ のベクトルは表せます．そして

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ が $V(-3)$ の基底となります．

次に $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ と定めると P は正則となります．実際

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

とすると $V(1) \oplus V(-3)$ の直和の性質を用いると

$$c_1\vec{p}_1 = \vec{0},\ c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

となりますが，$\vec{p}_1$ が $V(1)$ の $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ が $V(-3)$ の基底であることから

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = 0$$

を得ます．以上から $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ が 1 次独立であることが分かりました．これは P が正則であることの必要十分条件です．

さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \ -3\vec{p}_2\ \ -3\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

と A が対角化可能であることが示されました．

対角化可能な場合の必要十分条件

以下では $A \in M_3(\mathbf{K})$ が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$$

と $\alpha \neq \beta$ を満たす固有値 $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ を持ち，α が固有多項式の 2 重根である場合を考えます．

$$V(\alpha) = \ker(A - \alpha I_3),\ V(\beta) = \ker(A - \beta I_3)$$

と固有空間を定めます．α, β が固有値ですから

$$\dim V(\alpha) \geq 1, \quad \dim V(\beta) \geq 1$$

であることが分かります．実は

$$\boxed{1 \leq \dim V(\alpha) \leq 2, \quad \dim V(\beta) = 1}$$

となります．実際，もし $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in V(\alpha)$ が 1 次独立であるとすると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となり

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

から $P^{-1}AP = \alpha I_3$ となりますが，

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$$

となり仮定に矛盾します．よって

$$\dim V(\alpha) \leq 2$$

となります．同様にもし $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in V(\beta)$ が 1 次独立であるとすると，$\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ が $\mathbf{K}^3$ の基底となるように $\vec{q} \in \mathbf{K}^3$ を選ぶと $Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$ が正則となって

$$AQ = Q \begin{pmatrix} \beta & 0 & c_1 \\ 0 & \beta & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

と表示されますから，$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \beta & 0 & c_1 \\ 0 & \beta & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ となります．ところが

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{Q^{-1}AQ}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \beta & 0 & -c_1 \\ 0 & \lambda - \beta & -c_2 \\ 0 & 0 & \lambda - c_3 \end{vmatrix} = (\lambda - \beta)^2(\lambda - c_3)$$

となって矛盾が生じます．従って $\dim V(\beta) \leq 1$ であることが分かります．

次に以下の対角化可能性に関する判定条件を示します．

A が対角化可能であることと

$$V(\alpha) \oplus V(\beta) = \mathbf{K}^3 \tag{8.10}$$

であることとは必要十分です．

証明に入る前に (8.10) について言い換えをしておきます．

$$V(\alpha) \oplus V(\beta) \subset \mathbf{K}^3$$

において等式が成立する必要十分条件は

$$\dim\left(V(\alpha) \oplus V(\beta)\right) = \dim(\mathbf{K}^3)$$

です．この左辺は

$$\dim\left(V(\alpha) \oplus V(\beta)\right) = \dim\left(V(\alpha)\right) + \dim\left(V(\beta)\right) = \dim\left(V(\alpha)\right) + 1$$

ですから，(8.10) と $\dim(V(\alpha)) = 2$ が必要十分であることが分かります．

A が対角化可能であるとしましょう．このとき $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します．このとき $P = \vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3$ と列ベクトル表示をすると $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ は 1 次独立で

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_2 = \alpha\vec{p}_2$$

から $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ が従います．これから $\dim V(\alpha) \geq 2$ となりますから，$\dim V(\alpha) \leq 2$ から

$$\dim V(\alpha) = 2$$

を得ます．これは (8.10) と必要十分です．

逆に (8.10) が成立するとします．このとき

$$\dim V(\alpha) = 2$$

となりますから，$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ を $V(\alpha)$ の基底とします．さらに $\dim V(\beta) = 1$ ですから

$$V(\beta) = \mathbf{K}\vec{p}_3$$

となるように $V(\beta)$ の基底をとります．このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は 1 次独立です．実際，

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

とすると，$V(\alpha) \oplus V(\beta)$ の直和であることから

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}, \quad c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

が従います．さらに $V(\alpha)$ と $V(\beta)$ の基底として $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ をとってきたのですから

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

が従います．以上から $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ が正則であることが分かり，

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\alpha\vec{p}_1\ \alpha\vec{p}_1\ \beta\vec{p}_2) = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

から A が対角化可能であることが分かります．

さらに A の対角化可能性を言い換えます．

> A が対角化可能である必要十分条件は
>
> $$(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3 \tag{8.11}$$
>
> が成立することです．

証明に入る前に，多項式 $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ に対して $P \in M_3(\mathbf{K})$ が正則であるとき

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$$

が成立することを復習しましょう．

A が対角化可能とします．このとき正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します．このとき $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$ に対して

$$P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

から $f(A) = O_3$ が従います．

逆に (8.11) が成立すると仮定します．

$$1 = \frac{\lambda - \beta}{\alpha - \beta} + \frac{\lambda - \alpha}{\beta - \alpha} \tag{8.12}$$

が恒等的に成立します．それは $\lambda = \alpha, \beta$ を代入して成立することから分かります（223 ページの定理 8.5）．

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda - \beta}{\alpha - \beta}, \quad f_2(\lambda) = \frac{\lambda - \alpha}{\beta - \alpha}$$

として

$$P_1 = f_1(A), \quad P_2 = f_2(A)$$

と定めます．このとき (8.12) から $I_3 = f_1(A) + f_2(A)$ から

$$I_3 = P_1 + P_2 \tag{8.13}$$

が成立します．ここで任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v}_1 = P_1\vec{v}, \quad \vec{v}_2 = P_2\vec{v}$$

と定めると (8.13) から

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

が従います．さらに

$$(A - \alpha I_3)\vec{v}_1 = (A - \alpha I_3) \cdot \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta I_3)\vec{v} = O_3\vec{v} = \vec{0}$$

から $\vec{v}_1 \in V(\alpha)$ を得ます．同様に

$$(A - \beta I_3)\vec{v}_2 = (A - \beta I_3) \cdot \frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_3)\vec{v} = O_3\vec{v} = \vec{0}$$

から $\vec{v}_1 \in V(\beta)$ を得ます．以上から

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) + V(\beta)$$

を導きました．この右辺が直和 $V(\alpha) \oplus V(\beta)$ となるのは一般論から従います（定理 8.4**(1)**）．以上で示した

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

は A が対角化可能であることと必要十分条件です．

スペクトル分解

$A \in M_3(\mathbf{K})$ の固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$$

と分解され，．$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が $\alpha \neq \beta$ を満たすとと仮定します．さらに A が対角化可能であるとします．

まず上で定めた行列 P_1 と P_2 について性質を調べます．P_1 と P_2 は

$$I_3 = P_1 + P_2$$

を満たしました．また

$$P_1P_2 = -\frac{1}{\alpha - \beta}(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3$$

から

$$P_1P_2 = O_3$$

が分かります．さらに $I_3 = P_1 + P_2$ の両辺に P_1 を掛けると

$$P_1 = P_1(P_1 + P_2) = P_1^2 + P_1P_2 = P_1^2$$

から $P_1^2 = P_1$ が従います．同様に $P_2^2 = P_2$ が分かります．

以上で次が示されました．

$$\boxed{I_3 = P_1 + P_2,\ P_1P_2 = P_2P_1 = O_3,\ P_1^2 = P_1,\ P_2^2 = P_2}$$

上では

$$\mathrm{Im}(P_1) \subset V(\alpha), \quad \mathrm{Im}(P_2) \subset V(\beta) \tag{8.14}$$

を示しました．実はこの包含関係は等号になります．まず上で示した

$$\mathbf{K}^3 = \mathrm{Im}(P_1) + \mathrm{Im}(P_2)$$

の右辺が直和であることを示します[*5] $\vec{w}_1 \in \mathrm{Im}(P_1), \vec{w}_2 \in \mathrm{Im}(P_2)$ が

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0}$$

を満たすとします．このとき $\vec{w}_1 = P_1\vec{a}_1,\ \vec{w}_2 = P_2\vec{a}_2$ と書けますから

$$P_1\vec{w}_1 = P_1^2\vec{a}_1 = P_1\vec{a}_1 = \vec{w}_1,\ P_2\vec{w}_1 = P_2P_1\vec{a}_1 = O_3\vec{a}_1 = \vec{0}$$

同様に

$$P_2\vec{w}_2 = \vec{w}_2,\ P_1\vec{w}_2 = \vec{0}$$

が分かります．このことを用いると $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0}$ の両辺に P_1 を掛けると

$$\vec{w}_1 = \vec{0}$$

が分かります．$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0}$ にこれを代入すると $\vec{w}_2 = \vec{0}$ も従います．

以上で

$$\mathbf{K}^3 = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2)$$

を示しました．これから

$$3 = \dim \mathrm{Im}(P_1) + \dim \mathrm{Im}(P_2)$$

また (8.14) から

$$\dim \mathrm{Im}(P_1) \leq \dim V(\alpha), \quad \dim \mathrm{Im}(P_2) \leq \dim V(\beta)$$

が得られます．さらに

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

[*5] 以下では P_1 と P_2 の関係を用いる証明を与えます．$V(\alpha) \oplus V(\beta)$ の直和を用いると簡単に示せます．

から

$$\dim V(\alpha) + \dim V(\beta) = 3$$

が従います．以上をまとめると

$$3 = \dim \mathrm{Im}(P_1) + \dim \mathrm{Im}(P_2) \leq \dim V(\alpha) + \dim V(\beta) = 3$$

において中央の不等号が等号になることが分かります．それは

$$\dim \mathrm{Im}(P_1) = \dim V(\alpha), \quad \dim \mathrm{Im}(P_2) = \dim V(\beta)$$

が成立することと必要十分です．これは

$$\boxed{\mathrm{Im}(P_1) = V(\alpha), \quad \mathrm{Im}(P_2) = V(\beta) \qquad (8.15)}$$

であることを意味します．