1|1

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$

とおくと

$$\omega^3 = 1 \ , \ \omega^2+\omega+1=0$$

が成立。 n を3で割った余りによって場合分けをする。

(#) $f(x) = (x^2+x+1)Q(x) + Ax + B$ とするとき $A, B \in \mathbb{R}$ となることに注意する

(i) $n = 3k$ のとき

$$f(x) = x^{6k} + x^{3k} + 1$$

において $x = \omega$ を代入すると

$$f(\omega) = (\omega^3)^{2k} + (\omega^3)^{k} + 1 = 3 \neq 0$$

となる。

$$A\omega + B = 3$$

となるのは $A = B = 0$ となりえないので成立しない。

(ii) $n = 3k+1$ のとき

$$f(x) = x^{6k+2} + x^{3k+1} + 1$$

より $f(\omega) = \omega^2 + \omega + 1 = 0$

となる。(#) に $x = \omega$ を代入すると

$$A\omega + B = 0$$

となるのは $A = B = 0$ が成立。よって

f は x^2+x+1 で割り切れる。

(iii) $n=3k+2$ のとき.

$$f(x)= x^{6k+3+1} + x^{3k+2}+1$$

とする. $x=\omega$ を代入すると

$$f(\omega)=\omega+\omega^2+1=0$$

が分かる. ㊥ に代入すると

$$0=f(\omega)=A\omega+B.$$

より $A=B=0$ が従う. よって

$$x^2+x+1 \mid f.$$

__まとめ__ (i) n が 3 の倍数でないとき割りきれる

(ii) (i) でないとき. すなわち n が 3 の倍数のとき割りきれる.