$A \in M_n(\mathbb{R})$ は対称行列とする。このとき

(i) $\Phi_A(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

(ii) A は $\exists$ 直交行列 P を用いて対角化できる。

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} $$

(iii) A が定める2次形式は

$$ (A\vec{x}, \vec{x}) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_n \xi_n^2 $$

と (ii) の P を用いた直交座標変換

$$ \vec{x} = P\vec{\xi} \Leftrightarrow \vec{\xi} = {}^tP\vec{x} $$

を用いて変形できる。

定義 A が定める2次形式

$$ (A\vec{x}, \vec{x}) $$

が正定値であるとは

$$ (A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0}) $$

が成立するときである

定理1 (a) 実対称行列 A が定める2次形式が正定値であることと次の条件 (b) と (c) とは必要十分である。

(b) A の固有値はすべて正である

$$ \alpha_i > 0 \quad (i = 1, \cdots, n) $$

(c) $|A_k| > 0 \quad (k = 1, \cdots, n)$

No. (　　)

但し $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$, すなわち A から 1列, …, k列, 1行, …, k行をとった k 次小行列である.

(a) ⇒ (e)　$P = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n)$ と列ベクトル表示をすると

$$0 < (A\vec{p}_j, \vec{p}_j) = (\alpha_j \vec{p}_j, \vec{p}_j) = \alpha_j \|\vec{p}_j\| = \alpha_j$$

より分かる.

(e) ⇒ (a)　$\alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$ より

$$(A\vec{x}, \vec{x}) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_n \xi_n^2 \geq 0$$

である. 最後の等号成立条件は

$$\alpha_1 \xi_1^2 = \cdots = \alpha_n \xi_n^2 = 0$$

より $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$ すなわち $\vec{x} = \vec{0}$ である. よって

$$\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow (A\vec{x}, \vec{x}) > 0.$$

(a) ⇔ (c) を示す前に次の補題を示そう.

<u>補題</u>　実対称行列 A が定める2次形式が正定値ならば

$$|A| > 0$$

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

において $\alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$ である. 両辺の行列式をとると

$$|{}^tPAP| = |A| = \alpha_1 \cdots \alpha_n > 0$$

(a) ⇒ (c)　$\vec{x}_k = {}^t(x_1 \cdots x_k) \in \mathbb{R}^k$ とします.

$$\left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (A_k \vec{x}_k, \vec{x}_k)$$

より　A_k が定める2次形式は正定値となります.

よって　$|A_k| > 0 \quad (k=1,\cdots,n)$ が従います.

(c) ⇒ (a)

$n=3$ のとき説明します.（$n=2$ で示されているとします）

$A = \begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix}$ とします. (c) より $a>0$ です.

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qxz + 2ryz$$

$$= a\left(x + \frac{p}{a}y + \frac{q}{a}z\right)^2 + \left(b - \frac{p^2}{a}\right)y^2 + 2\left(r - \frac{pq}{a}\right)yz + \left(c - \frac{q^2}{a}\right)z^2$$

となる

$$|A| = \begin{vmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & q \\ 0 & b - \frac{p^2}{a} & r - \frac{pq}{a} \\ 0 & r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b - \frac{p^2}{a} & r - \frac{pq}{a} \\ r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix}$$

2行+=1行×$\left(-\frac{p}{a}\right)$

3行+=1行×$\left(-\frac{q}{a}\right)$

であるが $a>0$, $|A|>0$ より

$$\begin{vmatrix} b - \frac{p^2}{a} & r - \frac{pq}{a} \\ r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix} > 0$$

$|A_2| > 0$, $a > 0$ より $e - \frac{p^2}{a} = \frac{ae - p^2}{a} = \frac{|A_2|}{a} > 0$

となるので $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ならば

$$B = \begin{pmatrix} e - \frac{p^2}{a} & r - \frac{pq}{a} \\ r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{pmatrix}$$ とおくと

$$\left(B \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right) > 0$$

となる. $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ ならば $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ より $x \neq 0$ で

$a > 0$ より

$$ax^2 > 0.$$

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ならば

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = ax^2 + \left(B \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right) > 0$$

が従う.

正規行列の対角化について補足

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1 \Rightarrow A^*\vec{v}_1 = \bar{\alpha}\vec{v}_1$$

定理 A が正規とすると $\Phi_A(\alpha) = 0 \Rightarrow \Phi_{A^*}(\bar{\alpha})$

$\exists\vec{v} \neq \vec{0}$ が存在して $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$ である.

$A - \alpha I$ は正規であることに注意すると

$$\begin{aligned} 0 &= \|(A-\alpha I)\vec{v}\|^2 \\ &= \langle (A-\alpha I)\vec{v}, (A-\alpha I)\vec{v} \rangle \\ &= \langle (A-\alpha I)^*(A-\alpha I)\vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \langle (A-\alpha I)(A-\alpha I)^*\vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \langle (A-\alpha I)^*\vec{v}, (A-\alpha I)^*\vec{v} \rangle \\ &= \|(A^* - \bar{\alpha} I)\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

N.B. A が正規ならば $\|A\vec{x}\| = \|A^*\vec{x}\|$

より

$$A^*\vec{v} = \bar{\alpha}\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

が従うので

$$\Phi_{A^*}(\bar{\alpha}) = 0$$

定理 A が正規とする $\alpha \neq \beta$,

$$\begin{cases} A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1, & \vec{v}_1 \neq \vec{0} \\ A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2, & \vec{v}_2 \neq \vec{0} \end{cases}$$

とすると $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$

$$\langle A\vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, A^*\vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \bar{\beta}\vec{v}_2 \rangle$$

$$\langle A\vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \alpha\vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \alpha\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle, \qquad \langle \vec{v}_1, \bar{\beta}\vec{v}_2 \rangle = \beta\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

より $(\alpha - \beta)\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$ となるので $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$