slin2015
exco V11

V11 $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$ を unitary 行列で対角化しよう.

N.B. $A^* = A$ より A はエルミートであるので対角化可能である.

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -i & -1 \\ i & \lambda-1 & -i \\ -1 & i & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{1r+=3r}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & \lambda-2 \\ i & \lambda-1 & -i \\ -1 & i & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i & \lambda-1 & -i \\ -1 & i & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -2i \\ 0 & i & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2i \\ i & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

より A の固有値は $\lambda = 2, -i$ である.
次に固有ベクトルを求めよう.

$\lambda = -1$ のとき.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -2y - 2iz = 0 \\ iy - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ iy - z = 0 \end{cases}$$

より $x = -z,\ y = -iz$

すなわち $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -iz \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$

が固有ベクトルである. 大きさ1のベクトル

$\vec{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

λ = 2 のとき.

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff ix + y - iz = 0.$$

より

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-ix+iz\\z\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}$$

$(x \neq 0 \text{ か } z \neq 0)$

が固有ベクトルである.

$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}$, $\vec{g}_3 = \begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}$ とする.

$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}$ とする. $\vec{g}_3$ の $\vec{u}_2$ 方向への直交射影は

$$\langle \vec{g}_3 - \mu\vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle = 0$$

← 注 これが直交射影の定義.

より

$$\mu = \langle \vec{g}_3, \vec{u}_2 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle \begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-i\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i \cdot i) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

と得るので

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}$$

V(2) 中にあり $\vec{u}_2$ に垂直なベクトルは

$$\vec{g}_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{i}{2}\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\2\end{pmatrix}$$

となる

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\i\\2\end{pmatrix}$$

とすると $\langle \vec{u}_3, \vec{u}_2 \rangle = 0$, $\|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = 0$

となる. また一般論より

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_3 \rangle = 0$$

も成立する.

$\|\vec{u}_1\|=1$ も成立するので

$$U=(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3)$$

は unitary 行列で

$$AU=\begin{pmatrix}-\vec{u}_1 & 2\vec{u}_2 & 2\vec{u}_3\end{pmatrix}$$

$$=U\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

より $U^*AU=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$ と対角化できる.