2015/12/04.

正規行列の対角化

No. (1)

定理1（同時三角化）

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ は可換とします。
$$AB = BA.$$
このときある $U \in U(n)$ が存在して

$U^* A U$, $U^* B U$ が上三角行列となります。

補題1. $AB = BA$ とします。このとき $\exists \vec{p} \in \mathbb{C}^n$ に対して
$$A\vec{p} = \alpha \vec{p}, \quad \vec{p} = \beta \vec{p}$$
となります。

証明. $\Phi_A(\alpha) = 0$ とする $\alpha \in \mathbb{C}$ を一つとります。

$V(\alpha)$ の基底を $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_l$ とします。これを延長して
$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l, \cdots, \vec{p}_n$$
を $\mathbb{C}^n$ の基底とします。$1 \leq j \leq l$ のとき
$$\begin{aligned} AB\vec{p}_j &= BA\vec{p}_j \\ &= B\alpha \vec{p}_j \\ &= \alpha B \vec{p}_j \end{aligned}$$
より
$$B\vec{p}_j \in V(\alpha)$$
がわかります。よって $1 \leq j \leq l$ のとき
$$B\vec{p}_j = * \vec{p}_1 + \cdots + * \vec{p}_l$$
と表わされます。
$$B(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n) = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_l, \vec{p}_{l+1} \cdots \vec{p}_n) \left(\begin{array}{c|c} B_1 & * \\ \hline O & B_2 \end{array}\right)$$
と表現されます。

このとき $\Phi_{B_1}(\beta) = 0$ である $\beta \in \mathbb{C}$ を1つとると

$$B_1 \vec{c} = \beta \vec{c}$$

を満たす $\vec{c} \neq \vec{o}$ が存在します。このとき

$$B(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell)\vec{c} = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell) B \vec{c}$$

$$= \beta(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell)\vec{c}.$$

より $\vec{p} = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell)\vec{c}$ とすると

$$B\vec{p} = \beta \vec{p}$$

となります。$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ は1次独立なので $\vec{p} \neq \vec{o}$ です。
また $\vec{p} \in V(\alpha)$ より

$$A\vec{p} = \alpha \vec{p}$$

も従います。

(定理1の証明) n に関する

補題より $A\vec{q}_1 = \alpha_1 \vec{q}_1$, $B\vec{q}_1 = \beta_1 \vec{q}_1$, $\|\vec{q}_1\| = 1$

を満たす $\vec{q}_1 \in \mathbb{C}^n$ が存在します。$\vec{q}_1$ を用いて $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底 $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_n$ を構成し unitary 行列

$$Q = (\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_n)$$

を定めます。このとき

$$AQ = Q\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{o} & A_1 \end{array}\right), \quad BQ = Q\left(\begin{array}{c|c} \beta_1 & * \\ \hline \vec{o} & B_1 \end{array}\right)$$

となります。

$$Q^*AQ = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{o} & A_1 \end{array}\right), \quad Q^*BQ = \left(\begin{array}{c|c} \beta_1 & * \\ \hline \vec{o} & B_1 \end{array}\right)$$

から $A_1 B_1 = B_1 A_1$ が従います. 帰納法の仮定から $\exists R_1 \in U(n-1)$ に対して

$$R_1^* A_1 R_1 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$R_1^* B_1 R_1 = \begin{pmatrix} \beta_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}$$

とできます.

$$R = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \Phi \\ \hline \vec{0} & R_1 \end{array}\right)$$

とすると

$$R^* Q^* A Q R = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \Phi \\ \hline \vec{0} & R_1^* \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{0} & A_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \Phi \\ \hline \vec{0} & R_1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{0} & R_1^* A_1 R_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{0} & \begin{matrix} \alpha_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{matrix} \end{array}\right)$$

同様に

$$R^* Q^* A Q R = \left(\begin{array}{c|c} \beta_1 & * \\ \hline \vec{0} & \begin{matrix} \beta_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{matrix} \end{array}\right)$$

となります.

定義 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が正規とは,

$$A^* A = A A^*$$

が成立するときです.

定理2 $A \in M_n(\mathbb{C})$ がある $U \in U(n)$ によって

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \cdots (\#)$$

と対角できる必要十分条件は, A が正規であることです.

($\Rightarrow$) (#) を仮定すると,

$$A = U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} U^*$$

$$A^* = U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*$$

である.

$$A A^* = A^* A = U \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\alpha_n|^2 \end{pmatrix} U^*$$

より Aは 正規となります.

($\Leftarrow$) A が正規とします. $AA^* = A^* A$ ですから

ある $U \in U(n)$ に対して

(1) $$U^* A U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

(2) $$U^* A^* U = \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}$$

となります。(2) について adjoint をとると

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} & & \\ * & \ddots & \\ & & \overline{\beta_n} \end{pmatrix}$$

となります。これから

$$\beta_1 = \overline{\alpha_1}, \cdots, \beta_n \overline{\alpha_n}$$

で

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となることが従います。